Е. П. Богомолова, А. И. Бараненков, И. М. Петрушко

СБОРНИК ЗАДАЧ И ТИПОВЫХ РАСЧЕТОВ

ПО ОБЩЕМУ И СПЕЦИАЛЬНЫМ КУРСАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ЛАНЬ

Е. П. БОГОМОЛОВА,
А. И. БАРАНЕНКОВ,
И. М. ПЕТРУШКО

СБОРНИК ЗАДАЧ И ТИПОВЫХ РАСЧЕТОВ

по общему и специальным курсам высшей математики

Учебное пособие

ЛАНЬ®

• САНКТ-ПЕТЕРБУРГ •
• МОСКВА • КРАСНОДАР •
2015

ББК 22.1я73

Б 74

Богомолова Е. П., Бараненков А. И., Петрушко И. М.

Б 74 Сборник задач и типовых расчетов по общему и специальным курсам высшей математики: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2015. — 464 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-1833-6

Задачник содержит более 6500 несложных задач по общему и специальным курсам высшей математики. Пособие предназначено для бакалавров и специалистов технических и технологических, экономических, управленческих и междисциплинарных направлений подготовки, изучающих курс высшей математики. Задачи могут быть использованы как для аудиторной, так и для самостоятельной работы студентов. На последних страницах помещены справочные материалы по темам, которые в этом нуждаются.

ББК 22.1я73

Рецензент

И. А. СОЛОВЬЕВ — доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики и физики ФГБОУ ВПО ГУЗ.

Обложка
Е. А. ВЛАСОВА

ПРЕДИСЛОВИЕ

Роль математики в подготовке специалиста любой профессии часто недооценивается. Развитие логического мышления, памяти, способности к анализу — все это реализуется в процессе изучения математических дисциплин в высшем учебном заведении.

Математические знания обычно трудно осваиваются из-за их максимального абстрагирования от реальных жизненных процессов. Количество часов на изучение математики в учебном плане невелико, а студентам необходимо получить обширные знания природы вещей, основные законы которой часто поддаются описанию с помощью базовых математических объектов и моделей.

Занятия математикой должны быть направлены на освоение основных математических понятий, методов и логических связей. При этом на практических занятиях требуется на несложных в вычислительном плане задачах, причем в больших количествах, разъяснять сущность сложных математических объектов, приучать студента к современным методам математики и позволить при недостатке времени изучать математические методы на сравнительно простых примерах.

Данное пособие является обобщением и расширением книги: Бараненков А. И., Богомолова Е. П., Петрушко И. М. Сборник задач и типовых расчетов по высшей математике. СПб.: Лань, 2009. Нумерация заданий при этом сохраняется. В задачник добавлены как целые разделы, так и отдельные задачи.

Задачник содержит более 6500 несложных задач по общему и специальным курсам высшей математики для бакалавров и специалистов технических и технологических, экономических, управленческих и междисциплинарных направлений подготовки.

При отборе задач авторы руководствовались идеями устранения громоздких вычислений, скрывающих основные математические понятия, и намеренного дублирования типичных примеров, облегчающего выполнение домашних заданий. При необходимости усложненных вычислений студент, освоив на простых примерах основные математические идеи, может с успехом применить для своих исследований один из многочисленных пакетов вычислительных компьютерных программ.

Структура задачника предполагает, что разнообразных задач достаточно для:

1) решения примеров на практических занятиях с преподавателем (например, четные номера);
2) домашнего задания (нечетные номера);
3) индивидуальных типовых расчетов (30 вариантов) по каждому разделу.

В конце книги приведены справочные материалы по некоторым темам. Это не универсальный справочник. Предполагается, что отсутствие в нем некоторых сведений будет стимулировать контакт между преподавателем и студентом.

ЗАДАЧИ

I. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА. ТОЧНЫЕ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ. ПРОЦЕНТЫ

Написать разложение на простейшие множители чисел.

1.1. 12, 65, 108, 312, 576, 2100, 37300.

1.2. 30, 56, 99, 256, 882, 1244, 55000.

Найти НОК и НОД чисел.

1.3. 18, 48, 72.

1.4. 24, 45, 36.

1.5. 495, 2100.

1.6. 363, 440, 198.

Вычислить точно и приближенно (с помощью калькулятора).

1.7. $\frac{1}{3}+\frac{2}{15}+0{,}3.$

1.8. $\frac{2}{7}+\frac{2}{21}-\frac{1}{3}.$

1.9. $\frac{2}{5}+\frac{2}{6}-\frac{4}{15}.$

1.10. $\frac{7}{5}+\frac{5}{7}-\frac{11}{70}.$

1.11. $\dfrac{8\sqrt{5}}{0{,}4\cdot\sqrt{0{,}2}}.$

1.12. $\dfrac{-6\cdot\sqrt{\frac{1}{4}}+\frac{\sqrt{324}}{2}}{9}.$

1.13. $\frac{3}{2}:\sqrt{\frac{1}{0{,}09}}\cdot\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{90}}.$

1.14. $0{,}1\cdot\sqrt{20}:\sqrt{45}-2\frac{17}{30}.$

1.15. $\dfrac{\sqrt{22}-\sqrt{2}}{\sqrt{11}-11}\cdot\sqrt{11}.$

1.16. $\dfrac{\sqrt{7}-7}{\sqrt{35}-\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\frac{2}{15}+\frac{3}{45}}.$

Упростить.

1.17. $\sqrt[6]{3^7\cdot4^5}\cdot\sqrt[6]{3^5\cdot4}.$

1.18. $0{,}3\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{15}-0{,}1.$

1.19. $\sqrt[4]{(-3)^2\cdot2}\cdot\sqrt[4]{8\cdot9}.$

1.20. $\sqrt[3]{-25}\cdot\sqrt[3]{500}\cdot\sqrt[6]{100}.$

Сравнить числа.

1.21. $\dfrac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{24}}$ и $\dfrac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{12}}{\sqrt{20}}$. **1.22.** $\dfrac{\sqrt{15}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{10}}$ и $\dfrac{\sqrt{14}\cdot\sqrt{12}}{\sqrt{42}}$.

1.23. $\dfrac{2{,}4\cdot10^{-4}}{2\cdot10^{-3}}$ и 0,012. **1.24.** $\dfrac{2{,}8\cdot10^{-6}}{2\cdot10^{-4}}$ и 0,14.

1.25. $(10^8)^2\cdot100^{-6}$ и $(10^{-10}\cdot100^6)^2$.

1.26. $(0{,}001^3\cdot10^{12})^{-2}\cdot(0{,}1^2)^{-4}$ и 100.

Найти указанное число процентов от указанных чисел.

1.27. 10% от 700, 16% от 0,25, 25% от 80, 33% от (400 : 3), 60% от 10.

1.28. 5% от 75, 14% от (200 : 7), 50% от 0,001, 62% от 8, 99% от 10 000.

1.29. Увеличить число 27 на 3%.

1.30. Увеличить число 42 на 6%.

1.31. Увеличить число 0,039 на 13%.

1.32. Увеличить число 0,225 на 5%.

1.33. Уменьшить число 10 на 2%.

1.34. Уменьшить число 100 на 22%.

1.35. Уменьшить число 0,15 на 70%.

1.36. Уменьшить число 0,132 на 40%.

Сравнить.

1.37. 60% от 0,43 и 2% от 15.

1.38. 12% от 1024 и 7% от 1760.

1.39. 0,15% от 24 и 40% от 0,1.

1.40. 70% от 0,2 и 0,032% от 440.

2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. СТЕПЕНИ, КОРНИ, ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

Упростить выражения.

2.1. $\dfrac{a^2}{a^2-1}-\dfrac{a}{a-1}$.

2.2. $\dfrac{a^2}{a^2-4}-\dfrac{a}{a+2}$.

2.3. $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\dfrac{x-y}{x+y}$.

2.4. $\dfrac{x-y}{x+y}-\dfrac{y}{x-y}$.

2.5. $(y+10)(y-2)-4y(2-3y)$.

2.6. $(y+1)(y+3)-2y(1-3y)$.

2.7. $(x-3)(x+3)-(x^2+2)^2-x(x-3)^3$.

2.8. $(6-x)(x+2)-(x^2-1)^2-x(x+2)^3+3$.

2.9. $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{(x^2-y^2)}:(x^3+y^3)$.

2.10. $\dfrac{x^2-y^2}{(x^2-2xy+y^2)}\cdot(x^3-y^3)$.

2.11. $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+ac}}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+c}}\right):\sqrt{\dfrac{a}{a+c}}$.

2.12. $\dfrac{a-c}{a+c+2\sqrt{ac}}\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)$.

Выделить полный квадрат.

2.13. x^2-4x+5.

2.14. x^2+6x-7.

2.15. x^2-3x+1.

2.16. x^2+x+3.

2.17. $2x^2+8x+1$.

2.18. $3x^2+18x+11$.

2.19. $3x^2-5x-12$.

2.20. $5x^2-3x-16$.

3. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ (МЕТОД ИСКЛЮЧЕНИЯ). КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ

Решить уравнения и системы уравнений.

3.1. $4x-1=0$.

3.2. $6x+2=0$.

3.3. $8=0{,}5x$.

3.4. $3=0{,}3x$.

3.5. $x+4=5(0,2x+0,1)$.

3.6. $2(0,5+0,25x)=7-x$.

3.7. $\begin{cases} 2x-3y=1, \\ x+5y=2. \end{cases}$

3.8. $\begin{cases} 4x+y=1, \\ 2y-x=0. \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} 0,1x+0,16y=2, \\ 0,3y-3,25x=-6. \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} 5,2x-0,16y=1, \\ 0,2x-3,2y=-3. \end{cases}$

3.11. $x^2-5x+6=0$.

3.12. $x^2+x-6=0$.

3.13. $2x^2+x-3=0$.

3.14. $5x^2-2x-3=0$.

3.15. $3x^2-11x-4=0$.

3.16. $2x^2+9x-5=0$.

3.17. $\begin{cases} x-y=1, \\ x^2-2xy+8=0. \end{cases}$

3.18. $\begin{cases} x+y=2, \\ y^2-2xy+1=0. \end{cases}$

3.19. $\begin{cases} 2x+y=2, \\ 4x^2-2xy+8y^2+1=5. \end{cases}$

3.20. $\begin{cases} x-y=-1, \\ x^2-2xy+6y^2=6. \end{cases}$

4. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ С НИМИ

Решить уравнения.

4.1. $x^2+9=0$.

4.2. $x^2+4=0$.

4.3. $x^2-4x+5=0$.

4.4. $x^2-6x+13=0$.

4.5. $x^2+2x+2=0$.

4.6. $x^2-2x+5=0$.

4.7. $x^3-1=0$.

4.8. $x^3+1=0$.

Вычислить.

4.9. $i+(2-3i)$.

4.10. $2+(4-i)$.

4.11. $(5+i)-(2-i)$.

4.12. $(4-2i)-(3+i)$.

4.13. $(2-i)(4-2i)$.

4.14. $(3+i)(2-3i)$.

4.15. $(0,1-i)(3+0,5i)$.

4.16. $(0,3-2,7i)(1+i)$.

4.17. $\dfrac{1-i}{1+i}$.

4.18. $\dfrac{2+i}{2-i}$.

4.19. $\dfrac{2,1-1,8i}{1-0,1i}$.

4.20. $\dfrac{3-1,2i}{3+i}$.

5. МНОГОЧЛЕНЫ, РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ. ДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ. РАЗЛОЖЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ НА ПРОСТЕЙШИЕ ДРОБИ

Упростить.

5.1. $x(x+1)^2+2x-x^3$. **5.2.** $(x+3)(x-5)^2-(x+1)(1+x^2)$.

5.3. $(x-1)^3-(x+1)^3$. **5.4.** $(x+2)^3-(x-3)^3$.

5.5. $(2x-1)^4-(x+6)^4$. **5.6.** $(x-2)^4-(3x+6)^4$.

Найти корни многочлена, разложив его на множители.

5.7. $P(x)=x^3-x^2-12x$. **5.8.** $P(x)=x^3+x^2-17x+15$.

5.9. $P(x)=x^4-3x^3+4x$. **5.10.** $P(x)=x^4+x^3-30x^2$.

5.11. $P(x)=-2x^4-6x^2+8x$. **5.12.** $P(x)=-3x^4-5x^2-8x$.

Поделить с остатком.

5.13. $\dfrac{x^2-2x+5}{x-3}$. **5.14.** $\dfrac{x^2-3x-1}{x+2}$.

5.15. $\dfrac{2x^2-4x+1}{x+1}$. **5.16.** $\dfrac{3x^2-3x+5}{x-3}$.

5.17. $\dfrac{x^2+x+1}{2x-3}$. **5.18.** $\dfrac{x^2-x-1}{5x+2}$.

5.19. $\dfrac{3x^2+x-1}{x^2+4}$. **5.20.** $\dfrac{2x^2+2x+3}{x^2+1}$.

5.21. $\dfrac{x^3+2x^2+x+5}{x-6}$. **5.22.** $\dfrac{x^3-3x^2+x-1}{x+3}$.

5.23. $\dfrac{x^3-4x+2}{x^2-4}$. **5.24.** $\dfrac{x^3+2x^2-7}{x^2-1}$.

Разложить на простейшие дроби.

5.25. $\dfrac{2x+5}{x^2-25}$. **5.26.** $\dfrac{5x+4}{x^2-9}$.

5.27. $\dfrac{x-1}{x^2+2x-3}$. **5.28.** $\dfrac{x+2}{x^2+4x+3}$.

5.29. $\dfrac{4x}{x^2-5x-14}$. **5.30.** $\dfrac{x}{x^2-2x-15}$.

5.31. $\dfrac{x-1}{x^3+2x^2-8x}$. **5.32.** $\dfrac{x+4}{x^3+5x^2+6x}$.

6. ФУНКЦИЯ, АРГУМЕНТ И ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ, ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ

Вычислить значения функций в заданных точках.

6.1. $y=(x-3)^2(x+2)$, $x=2$.

6.2. $y=(2x-1)^3(x-1)$, $x=0{,}5$.

6.3. $y=2^{3-x}$, $x=7$.

6.4. $y=5^{x-2}$, $x=5$.

6.5. $y=e^{4x^2-2x}$, $x=\dfrac{1}{2}$.

6.6. $y=e^{2x^2+3x}$, $x=-1$.

6.7. $y=\log_2(x^5+1)$, $x=1$.

6.8. $y=\log_2(x^3+5)$, $x=3$.

6.9. $y=(x-4)\lg(x-1)$, $x=1{,}1$.

6.10. $y=(x^2+2)\lg(x+3)$, $x=7$.

6.11. $y=\ln(1-2x+2e)$, $x=e$.

6.12. $y=\ln\left(1+e-\dfrac{x}{3}\right)$, $x=3e$.

6.13. $y=\sin^2 x+\cos 2x$, $x=\dfrac{\pi}{6}$.

6.14. $y=\cos^2 x-\sin 2x$, $x=\dfrac{\pi}{3}$.

6.15. $y=\sin x\cos x-\operatorname{tg}^2 x$, $x=\dfrac{5\pi}{4}$.

6.16. $y=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x-\sin 3x$, $x=\dfrac{\pi}{4}$.

6.17. $y=2\arcsin x-\dfrac{\pi}{4}$, $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

6.18. $y=0{,}5\operatorname{arctg}2x+\dfrac{\pi}{8}$, $x=\dfrac{1}{2}$.

6.19. $y=\dfrac{4}{3}\operatorname{sh}x-\operatorname{ch}(2x+1)$, $x=0$.

6.20. $y=2\operatorname{ch}(x-1)-\operatorname{sh}(2x)$, $x=1$.

Построить графики функций.

6.21. $y=2x-3$.

6.22. $y=3x+2$.

6.23. $2y-x=7$.

6.24. $5y+x=8$.

6.25. $3x-7y+21=0$.

6.26. $5y-4x-20=0$.

6.27. $y=x^2-3$.

6.28. $y=2-x^2$.

6.29. $y=5-x^2+2x$.

6.30. $y=x^2+4x-2$.

6.31. $y=\sqrt{4x-2}$.

6.32. $y=\sqrt{x+6}$.

6.33. $y=-\sqrt{3-8x}$.

6.34. $y=\sqrt{-5x}$.

6.35. $y=2\sin x-1$.

6.36. $y=-4\cos x$.

6.37. $y=2+\ln x$.

6.38. $y=4-\ln x$.

6.39. $y=5e^x-3$.

6.40. $y=1-2^x$.

6.41. $y=\dfrac{x-3}{x+2}$.

6.42. $y=\dfrac{x+1}{x-5}$.

6.43. $y=\dfrac{2x}{3-x}$.

6.44. $y=\dfrac{x+8}{x}$.

Упростить и построить график функции.

6.45. $y=\dfrac{x-3}{x}-\dfrac{x^2-9}{x}\cdot\dfrac{1}{x-3}$.

6.46. $y=\dfrac{x^2-4}{x}\cdot\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{x+2}{x}$.

6.47. $y=1-\dfrac{x^2-5x}{x+1}\cdot\dfrac{1}{x-5}$.

6.48. $y=(x+4)\cdot\dfrac{x+6}{x^2-16}-\dfrac{x-6}{x-4}$.

6.49. $y=\dfrac{9x^2-4}{2-3x}-\dfrac{6x^2-5x-6}{3-2x}-x$.

6.50. $y=\dfrac{x+1}{x^3+x^2+x}:\dfrac{1}{x^4-x}-x^2+x$.

6.51. $y=\left(\dfrac{1}{5\sqrt{x}}+\dfrac{1}{10\sqrt{x}}\right)\cdot\dfrac{x}{6}$.

6.52. $y=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{6\sqrt{x}}\right)\cdot\dfrac{x}{4}$.

6.53. $y=\left(4\sqrt{x}-\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$.

6.54. $y=\left(2\sqrt{x}-\dfrac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{x}+2}{4\sqrt{x}}$.

6.55. $y=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{\sqrt{x}-x^2}+x+3\sqrt{x}$.

6.56. $y=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cdot\left(\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)$.

6.57. $y=\left(\dfrac{x^{1,5}-1}{x^{0,5}-1}+x^{0,5}\right):\dfrac{x-1}{x^{0,5}-1}$.

6.58. $y=\left(\dfrac{x^{2,5}+x^{1,5}}{x+1}+1\right):\dfrac{1-x^3}{x^{1,5}-1}$.

6.59. $y=9^{x+1}\cdot(3^{-x}+1)-9\cdot 9^x$.

6.60. $y=\dfrac{25^{x+2}\cdot 5^{-x}}{625}+\dfrac{5^{2x+1}}{25^x}$.

6.61. $y=\left(\dfrac{2+2^x}{2-2^x}-\dfrac{2-2^x}{2+2^x}\right)\cdot\dfrac{4-4^x}{8^{x+1}}$.

6.62. $y=\left(\dfrac{2^x+2}{4^x+2^{x+2}+1}-\dfrac{2^x-2}{4^x-1}\right)\cdot\dfrac{(4^x-1)\cdot(2^x+1)}{4^x}$.

6.63. $y=-\ln x+\ln e+\ln x^2$.

6.64. $y=3\ln x+\ln x^2+\ln e+\ln 1$.

6.65. $y=\dfrac{\ln\sqrt{x}-\ln\sqrt[3]{x}}{\ln\sqrt[4]{x}-\ln\sqrt[12]{x}}+2\ln x$.

6.66. $y=\dfrac{\ln\sqrt[5]{x}+\ln\sqrt[10]{x}}{\ln\sqrt{x}-\ln\sqrt[4]{x}}-\ln x^3$.

6.67. $y=\left(\dfrac{\ln(4x)}{\ln x}-\dfrac{\lg(4x)}{\lg x}+2\right)^{\log_4(4x^2)}$.

6.68. $y=\left(\dfrac{\ln(5x)}{\ln x}-\dfrac{\lg(5x)}{\lg x}+3\right)^{\log_9(4x^4)}$.

6.69. $y=\left(x^{\log_{\sqrt[3]{x}}2}+x^{4\log_{x^2}3}\right)\cdot x^2+x$.

6.70. $y=\left(x^{\log_{4\sqrt[4]{x}}3}-x^{8\log_{x^4}5}\right)\cdot x^2-2x+5.$

6.71. $y=\cos^4 x+\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x.$

6.72. $y=\sin^4 x-\cos^4 x-\sin^2 x+\cos^2 x-2.$

6.73. $y=\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x.$

6.74. $y=(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)^2-(\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x)^2.$

6.75. $y=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-\sin x+2\cos x.$

6.76. $y=-2\cos^2\frac{x}{2}+2\sin x+\cos x.$

6.77. $y=-\sin x+\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\cos x\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg} x.$

6.78. $y=\cos x\cdot\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right]+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$

7. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Вычислить.

7.1. 5!

7.2. 7!

7.3. 12!

7.4. 20!

7.5. $\frac{6!}{4!}.$

7.6. $\frac{10!}{7!}.$

7.7. $\frac{8!}{13!}.$

7.8. $\frac{15!}{19!}.$

7.9. $C_7^2.$

7.10. $C_8^1.$

7.11. $C_{10}^3.$

7.12. $C_{12}^5.$

7.13. $C_5^4.$

7.14. $C_7^6.$

7.15. $C_{12}^0.$

7.16. $C_4^0.$

7.17. $C_6^1.$

7.18. $C_7^1.$

7.19. $C_{11}^{11}.$

7.20. $C_3^3.$

Упростить.

7.21. $\frac{(n+2)!}{(n-1)!}.$

7.22. $\frac{(n-2)!}{(n+1)!}.$

7.23. $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}.$

7.24. $\frac{(n-1)!}{n!}.$

7.25. $\dfrac{(n+2)!-(n+1)!}{n!}$.

7.26. $\dfrac{(n-1)!-(n+1)!}{n!}$.

7.27. $\dfrac{(n+1)!+n!}{(n+2)n!}$.

7.28. $\dfrac{(n+3)!+(n+2)!}{(n+4)(n+1)!}$.

7.29. $\dfrac{(2n+1)!}{(2n+1)!!}$.

7.30. $\dfrac{(2n+1)!}{(2n)!!}$.

7.31. $\dfrac{(2n)!}{(2n)!!}$.

7.32. $\dfrac{(2n)!}{(2n-1)!!}$.

II. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. ДЕКАРТОВЫ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ. ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ НА ПЛОСКОСТИ

Построить в прямоугольной декартовой системе координат точки.

1.1. $A(2, 1)$, $B(-5, 2)$, $C(-1, -2)$.

1.2. $A(-1, 2)$, $B(-3, 1)$, $C(-2, 1)$.

1.3. $A(0, 2)$, $B(2, 0)$, $C(-1, 0)$.

1.4. $A(3, 0)$, $B(0, -2)$, $C(-5, 0)$.

1.5. $A(0, 0, 1)$, $B(2, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$.

1.6. $A(-1, 0, 0)$, $B(0, -3, 0)$, $C(0, 0, -2)$.

1.7. $A(1, 2, 0)$, $B(2, -1, 0)$, $C(0, 1, -1)$.

1.8. $A(-2, 1, 0)$, $B(0, -2, 2)$, $C(1, 1, 0)$.

1.9. $A(-1, 2, 1)$, $B(1, -2, -2)$, $C(-1, -2, 2)$.

1.10. $A(1, -2, -1)$, $B(-1, 2, 1)$, $C(1, 2, 3)$.

Построить в полярных координатах на плоскости точки.

1.11. $A(2, \pi/4)$, $B(1, \pi/3)$, $C(1, 2\pi/3)$.

1.12. $A(1, \pi/6)$, $B(2, \pi/2)$, $C(3, \pi)$.

1.13. $A(2, 5\pi/4)$, $B(1, 5\pi/3)$, $C(1, 4\pi/3)$.

1.14. $A(1, 7\pi/6)$, $B(2, 7\pi/6)$, $C(3, 7\pi/4)$.

1.15. $A(2, 5\pi/6)$, $B(1, 3\pi/2)$, $C(3, 2\pi)$.

1.16. $A(1, 11\pi/6)$, $B(1, 3\pi/4)$, $C(1, 0)$.

Найти полярные координаты точек, заданных в декартовых координатах.

1.17. $A(-2, 2)$, $B(2, -2)$. **1.18.** $A(1, 1)$, $B(-3, -3)$.

1.19. $A\left(\sqrt{3}, 1\right)$, $B\left(-\sqrt{3}, 1\right)$. **1.20.** $A\left(-\sqrt{3}, -1\right)$, $B\left(\sqrt{3}, -1\right)$.

1.21. $A(2, 0)$, $B(-2, 0)$. **1.22.** $A(0, -2)$, $B(0, 2)$.

Найти декартовы координаты точек, заданных в полярных координатах.

1.23. $A(2, \pi/4)$, $B(1, \pi/3)$, $C(1, 2\pi/3)$.

1.24. $A(1, \pi/6)$, $B(2, \pi/2)$, $C(3, \pi)$.

1.25. $A(2, 5\pi/4)$, $B(1, 5\pi/3)$, $C(1, 4\pi/3)$.

1.26. $A(1, 7\pi/6)$, $B(2, 7\pi/6)$, $C(3, 7\pi/4)$.

1.27. $A(2, 5\pi/6)$, $B(1, 3\pi/2)$, $C(3, 2\pi)$.

1.28. $A(1, 11\pi/6)$, $B(1, 3\pi/4)$, $C(1, 0)$.

Найти и изобразить в декартовых и полярных координатах точки, симметричные данным, относительно оси Ox, относительно оси Oy (полярная ось совпадает с положительным лучом Ox).

1.29. $A(-2, 2)$, $B(2, -2)$. **1.30.** $A(1, 1)$, $B(-3, -3)$.

1.31. $A\left(\sqrt{3}, 1\right)$, $B\left(-\sqrt{3}, 1\right)$. **1.32.** $A\left(-\sqrt{3}, -1\right)$, $B\left(\sqrt{3}, -1\right)$.

1.33. $A(2, 0)$, $B(-2, 0)$. **1.34.** $A(0, -2)$, $B(0, 2)$.

Найти и изобразить точки, симметричные координатным плоскостям для заданных точек.

1.35. $A(0, 0, 1)$, $B(2, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$.

1.36. $A(-1, 0, 0)$, $B(0, -3, 0)$, $C(0, 0, -2)$.

1.37. $A(1, 2, 0)$, $B(2, -1, 0)$, $C(0, 1, -1)$.

1.38. $A(-2, 1, 0)$, $B(0, -2, 2)$, $C(1, 1, 0)$.

1.39. $A(-1, 2, 1)$, $B(1, -2, -2)$, $C(-1, -2, 2)$.

1.40. $A(1, -2, -1)$, $B(-1, 2, 1)$, $C(1, 2, 3)$.

1.41. $A(1, 2, -1)$, $B(1, -2, 2)$, $C(-1, 2, 2)$.

1.42. $A(3, 1, -2)$, $B(3, -2, 2)$, $C(-1, -2, -3)$.

2. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Определить, лежат ли на данной прямой указанные точки.

2.1. $y=3x-1$, $A(1,\ 2)$, $B(0,\ 1)$.

2.2. $y=-2x+3$, $A(1,\ 0)$, $B(1,\ -1)$.

2.3. $y-2=\dfrac{1}{2}(x-1)$, $A(0,\ 1)$, $B(2,\ 1)$.

2.4. $y+1=3(x-1)$, $A(1,\ -1)$, $B(0,\ -4)$.

2.5. $\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{x+1}{2}$, $A(1,\ 0)$, $B(-1,\ 1)$.

2.6. $\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{x-1}{1}$, $A(2,\ 2)$, $B(1,\ 2)$.

2.7. $2x-3y+1=0$, $A\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$, $B\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$.

2.8. $3x+2y-2=0$, $A(0,\ 1)$, $B\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$.

2.9. $\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{3}=1$, $A(1,\ 1)$, $B(-2,\ 0)$.

2.10. $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-2}=1$, $A(3,\ 2)$, $B(0,\ -2)$.

Найти вторую координату точки, лежащей на данной прямой.

2.11. $y=2x+2$, $A(x,\ 3)$, $B(-1,\ y)$.

2.12. $y=-x+2$, $A(x,\ -2)$, $B(3,\ y)$.

2.13. $3x-2y+1=0$, $A(x,\ 1)$, $B(1,\ y)$.

2.14. $2x+3y-1=0$, $A(x,\ 1)$, $B(2,\ y)$.

2.15. $\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{x-1}{2}$, $A(x,\ 1)$, $B(2,\ y)$.

2.16. $\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{x+2}{-3}$, $A(x,\ -2)$, $B(-1,\ y)$.

2.17. $\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{-1}=1$, $A(x,\ -1)$, $B(2,\ y)$.

2.18. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-2}=1$, $A(x,\ -1)$, $B(2,\ y)$.

2.19. $x=3$, $A(x,\ 2)$, $B(3,\ y)$.

2.20. $y=-2$, $A(x,\ -2)$, $B(3,\ y)$.

Составить уравнение и построить прямую, зная угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый ею на оси Oy.

2.21. $k=\frac{1}{\sqrt{3}},\ b=1.$ **2.22.** $k=-\sqrt{3},\ b=2.$

2.23. $k=-1,\ b=-2.$ **2.24.** $k=-\frac{1}{\sqrt{3}},\ b=-1.$

2.25. $k=0,\ b=-1.$ **2.26.** $k=-1,\ b=0.$

Построить прямую и найти угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый ею на оси Oy.

2.27. $2x-3y+1=0.$ **2.28.** $3x+2y-1=0.$

2.29. $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1.$ **2.30.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1.$

2.31. $\frac{y-1}{3}=\frac{x+1}{-2}.$ **2.32.** $\frac{y+1}{-3}=\frac{x-1}{2}.$

2.33. $x-2=0.$ **2.34.** $y+1=0.$

Составить уравнение прямой, проходящей через заданную точку, зная ее угловой коэффициент k.

2.35. $M(1,\ 3),\ k=-1.$ **2.36.** $M(-1,-3),\ k=1.$

2.37. $M(-1,\ 2),\ k=\sqrt{3}.$ **2.38.** $M(1,\ 2),\ k=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$

2.39. $M(1,\ -2),\ k=0.$ **2.40.** $M(3,-1),\ k=\infty.$

Составить уравнение прямой, проходящей через заданную точку параллельно данной прямой.

2.41. $M(1,\ 3),\ \frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1.$ **2.42.** $M(-1,\ 2),\ \frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1.$

2.43. $M(2,\ 1),\ x-3=0.$ **2.44.** $M(-2,\ 1),\ y+1=0.$

2.45. $M(1,\ 3),\ 2x-3y+1=0.$ **2.46.** $M(-1,\ -2),\ 3x+2y-1=0.$

Составить уравнение прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно данной прямой.

2.47. $M(1,\ 3),\ \frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1.$ **2.48.** $M(-1,\ 2),\ \frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1.$

2.49. $M(2, 1)$, $x-3=0$.

2.50. $M(-2, 1)$, $y+1=0$.

2.51. $M(1, 3)$, $2x-3y+1=0$.

2.52. $M(-1, -2)$, $3x+2y-1=0$.

Составить уравнение и построить прямую, проходящую через две заданные точки и найти ее угловой коэффициент.

2.53. $A(-1, 3)$, $B(0, 2)$.

2.54. $A(1, -3)$, $B(0, 1)$.

2.55. $A(1, -2)$, $B(2, 0)$.

2.56. $A(-1, 3)$, $B(2, 0)$.

2.57. $A(1, 1)$, $B(1, -3)$.

2.58. $A(-1, -1)$, $B(2, -1)$.

Составить уравнение и построить прямую, зная отрезки, отсекаемые ею на осях координат, найти угловой коэффициент прямой.

2.59. $a=1$, $b=-2$.

2.60. $a=2$, $b=-1$.

2.61. $a=0$, $b=2$.

2.62. $a=-2$, $b=0$.

2.63. $a=\infty$, $b=-1$.

2.64. $a=1$, $b=\infty$.

Найти точки пересечения данной прямой с координатными осями.

2.65. $2x-3y+1=0$.

2.66. $3x+2y-1=0$.

2.67. $\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{3}=1$.

2.68. $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-2}=1$.

2.69. $\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{x+1}{-2}$.

2.70. $\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{x-1}{2}$.

Найти точки пересечения данных прямых.

2.71. $3y-4x-1=0$, $3x+4y-18=0$.

2.72. $2x-3y-6=0$, $4x-6y-5=0$.

2.73. $y=2x-1$, $y=-x+2$.

2.74. $y=-2x+1$, $y=x-2$.

2.75. $\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{3}=1$, $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-2}=1$.

2.76. $x+2y-1=0$, $2x+4y-2=0$.

2.77. $y=2x-4$, $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-1}=1$.

2.78. $y=2x-4$, $\dfrac{x}{-1}+\dfrac{y}{1}=1$.

Найти угол между данными прямыми.

2.79. $5x-y+7=0,\ 3x+2y=0.$

2.80. $3x-2y+7=0,\ 2x+3y-3=0.$

2.81. $x-2y-4=0,\ 2x-4y+3=0.$

2.82. $3x+2y-1=0,\ 5x-2y+3=0.$

2.83. $y=3x+5,\ y=-2x+7.$

2.84. $y=\sqrt{3}x,\ \ y=-\sqrt{3}x.$

2.85. $y=x-1,\ y=0.$

2.86. $y=-x+1,\ y=0.$

2.87. $y=\sqrt{3}x-2,\ \ x=2.$

2.88. $y=-\sqrt{3}x+1,\ \ x=-1.$

3. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Определить, лежат ли указанные точки на данных кривых.

3.1. $9x^2+5y^2-45=0,\ M(1,\ -3).$

3.2. $8x^2+5y^2-77=0,\ M(-2,\ 3).$

3.3. $x^2+y^2-26x+30y+313=0,\ M(13,\ -6).$

3.4. $x^2+y^2-10x-14y-151=0,\ M(-3,\ 1).$

3.5. $16x^2-9y^2=144,\ M(-3{,}75,\ 3).$

3.6. $16x^2-9y^2=-144,\ M(2,\ 5).$

3.7. $y^2=4x-8,\ M(3,\ -2).$

3.8. $x^2=7y+2,\ M(4,\ 2).$

Построить окружность, определить, как расположены относительно нее указанные точки.

3.9. $x^2+y^2-4x+6y=0,\ M(4,\ 0).$

3.10. $x^2+y^2+2x-2y-7=0,\ M(0,\ 3).$

3.11. $x^2+y^2-x+2y-1=0,\ M(1{,}5,\ 1).$

3.12. $x^2+y^2+3x-5y-0{,}5=0,\ M(1,\ 2).$

3.13. $2x^2+2y^2-3x-5y+3=0,\ M(1,\ 2).$

3.14. $2x^2+2y^2-5x+5y+3=0$, $M(1, 1)$.

3.15. $0{,}5x^2+0{,}5y^2+2{,}5x-3{,}5y+1{,}3=0$, $M(0, 0)$.

3.16. $1{,}2x^2+1{,}2y^2-3{,}6x+4{,}8y-7=0$, $M(1, 1)$.

Построить эллипс, определить, как расположены относительно него указанные точки.

3.17. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$, $M(0, -3)$. **3.18.** $9x^2+25y^2=1$, $M(3, 0)$.

3.19. $x^2+25y^2=25$, $M(2, 1)$. **3.20.** $25x^2+y^2=25$, $M(0, 2)$.

3.21. $8x^2+5y^2=77$, $M(-2, 3)$. **3.22.** $8x^2+5y^2=77$, $M(2, -3)$.

3.23. $8x^2+5y^2=77$, $M(-2, 4)$. **3.24.** $8x^2+5y^2=77$, $M(-2, 2)$.

Построить гиперболу, определить, принадлежат ли ей указанные точки.

3.25. $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$, $M(3, 0)$ **3.26.** $\dfrac{x^2}{16}-y^2=1$, $M(0, 1)$.

3.27. $x^2-25y^2=25$, $M(1, 1)$. **3.28.** $25x^2-y^2=-25$, $M(-1, 0)$.

3.29. $4x^2-9y^2=1$, $M\left(0, \dfrac{1}{3}\right)$. **3.30.** $9x^2-4y^2=-1$, $M\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

3.31. $5x^2-7y^2=70$, $M(6, 0)$.

3.32. $7x^2-5y^2=-35$, $M\left(\sqrt{5}, 0\right)$.

Построить параболу, определить, принадлежат ли ей указанные точки.

3.33. $y^2=4x-8$, $M(1, -2)$. **3.34.** $y^2=6-3x$, $M(2, 0)$.

3.35. $y^2=4-4x$, $M(2, 4)$. **3.36.** $y^2=6+2x$, $M(5, -4)$.

3.37. $x^2=2y-4$, $M(-2, 4)$. **3.38.** $x^2=3y+6$, $M(-3, 1)$.

3.39. $x^2=4-4y$, $M(-4, 3)$. **3.40.** $x^2=6-3y$, $M(-3, 1)$.

Установить, какие кривые (или части кривых) определяются данными уравнениями, и построить их.

3.41. $x^2+y^2-10x+8y=0$. **3.42.** $x^2+y^2-8x-4y-5=0$.

3.43. $y=-3-\sqrt{21-4x-x^2}$. **3.44.** $x=-5+\sqrt{40-6y-y^2}$.

3.45. $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$.

3.46. $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0.$

3.47. $y=1-\dfrac{4}{3}\sqrt{-6x-x^2}.$ **3.48.** $x=-5+\dfrac{2}{3}\sqrt{8+2y-y^2}.$

3.49. $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0.$

3.50. $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0.$

3.51. $y=7-\dfrac{3}{2}\sqrt{x^2-6x+13}.$ **3.52.** $x=5-\dfrac{3}{4}\sqrt{y^2+4y-12}.$

3.53. $y=4x^2-8x+7.$ **3.54.** $x=2y^2-12y+14.$

3.55. $y=3-4\sqrt{x-1}.$ **3.56.** $x=-4+3\sqrt{y+5}.$

3.57. $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{8}=0.$ **3.58.** $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{8}=0.$

3.59. $x^2=4.$ **3.60.** $y^2=9.$

3.61. $x^2=0.$ **3.62.** $y^2=0.$

3.63. $x^2+2y^2=-4.$ **3.64.** $x^2-2y^2=-4.$

Найти точки пересечения данной кривой и прямой, построить график.

3.65. $x^2+y^2-2x+4y+1=0,\ y=x-1.$

3.66. $x^2+y^2+2x-4y+1=0,\ y=x-1.$

3.67. $\dfrac{x^2}{40}+\dfrac{y^2}{10}=1,\ \ 3x-2y-20=0.$

3.68. $\dfrac{x^2}{40}+\dfrac{y^2}{10}=1,\ \ x+6y-20=0.$

3.69. $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1,\ \ 5x-6y-16=0.$

3.70. $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1,\ \ 13x-10y-48=0.$

3.71. $x^2=4y,\ x+y-3=0.$

3.72. $y^2=-9x,\ 3x+4y-12=0.$

Найти точки пересечения данных кривых, построить график.

3.73. $x^2+9y^2-45=0,\ x^2+9y^2-6x-27=0.$

3.74. $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{5}=1,\ \ \dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{3}=1.$

3.75. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{225}=1,\ x^2+y^2-4x-2y-20=0.$

3.76. $7x-y+12=0,\ y^2=24x.$

3.77. $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=-1,\ y^2=3x.$

3.78. $y=x^2-2x+1,\ x=y^2-6x+7.$

4. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. ПРАВИЛО КРАМЕРА

Вычислить определители второго порядка.

4.1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$

4.2. $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}.$

4.3. $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}.$

4.4. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}.$

4.5. $\begin{vmatrix} x & 3 \\ y & 2 \end{vmatrix}.$

4.6. $\begin{vmatrix} -1 & a \\ 2 & b \end{vmatrix}.$

Вычислить определители третьего порядка.

4.7. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$

4.8. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$

4.9. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}.$

4.10. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$

4.11. $\begin{vmatrix} 2 & x & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & y \end{vmatrix}.$

4.12. $\begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix}.$

Вычислить определители третьего порядка разложением по строке или столбцу.

4.13. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$

4.14. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$

4.15. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$ **4.16.** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 7 \end{vmatrix}.$

4.17. $\begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$ **4.18.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}.$

4.19. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}.$ **4.20.** $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}.$

Вычислить определители четвертого порядка.

4.21. $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$ **4.22.** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$

4.23. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$ **4.24.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$

4.25. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}.$ **4.26.** $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix}.$

Доказать, что определитель равен нулю, не вычисляя его.

4.27. $\begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$ **4.28.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$

4.29. $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$ **4.30.** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$

4.31. $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

4.32. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

4.33. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

4.34. $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ -9 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

Решить систему двух линейных уравнений по правилу Крамера.

4.35. $\begin{cases} 3x-5y=13, \\ 2x+7y=81. \end{cases}$

4.36. $\begin{cases} 3y-4x=1, \\ 3x+4y=18. \end{cases}$

4.37. $\begin{cases} 2x-3y=6, \\ 4x-6y=5. \end{cases}$

4.38. $\begin{cases} 2y-x=3, \\ 2x-4y=4. \end{cases}$

4.39. $\begin{cases} 2x-3y=0, \\ 5x+y=0. \end{cases}$

4.40. $\begin{cases} 3y+x=0, \\ 3x-y=0. \end{cases}$

Решить систему трех линейных уравнений по правилу Крамера.

4.41. $\begin{cases} x+2y+z=4, \\ 3x-5y+3z=1, \\ 2x+7y-z=8. \end{cases}$

4.42. $\begin{cases} 2x-4y+9z=28, \\ 7x+3y-6z=-1, \\ 7x+9y-9z=5. \end{cases}$

4.43. $\begin{cases} x+y-z=36, \\ x+z-y=13, \\ y+z-x=7. \end{cases}$

4.44. $\begin{cases} x+y+z=36, \\ 2x-3z=-17, \\ 6x-5z=7. \end{cases}$

4.45. $\begin{cases} 2x-y+z=-2, \\ x+2y+3z=-1, \\ x-3y-2z=3. \end{cases}$

4.46. $\begin{cases} 3x-y+2z=5, \\ 2x-y-z=2, \\ 4x-2y-2z=-3. \end{cases}$

5. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Заданы длины векторов $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ и угол между ними. Изобразить вектор $\vec{c}$ (начала всех векторов в одной точке).

5.1. $|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=2,\ \varphi=\frac{\pi}{2},\ \vec{c}=\vec{a}+\vec{b}.$

5.2. $|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=2,\ \varphi=\frac{2\pi}{3},\ \vec{c}=\vec{a}-\vec{b}.$

5.3. $|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=2,\ \varphi=\frac{\pi}{2},\ \vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}.$

5.4. $|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=2,\ \varphi=\frac{2\pi}{3},\ \vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}.$

5.5. $|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=2,\ \varphi=\frac{3\pi}{2},\ \vec{c}=-\vec{a}-\vec{b}.$

5.6. $|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=2,\ \varphi=\frac{\pi}{2},\ \vec{c}=\vec{b}-2\vec{a}.$

5.7. $|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=2,\ \varphi=\frac{2\pi}{3},\ \vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}.$

5.8. $|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=2,\ \varphi=-\frac{2\pi}{3},\ \vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}.$

Найти координаты вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, если заданы координаты его начала (A) и конца (B).

5.9. $A(2,\ 1),\ B(1,\ -2).$

5.10. $A(-3,\ 2),\ B(0,\ 2).$

5.11. $A(-1,\ -1),\ B\left(\frac{2}{3},\ -\frac{3}{5}\right).$

5.12. $B(1,\ -2),\ A(1{,}5,\ 2{,}6).$

5.13. $A(1,\ -2,\ 2),\ B(2,\ 3,\ -1).$

5.14. $A(-3,\ -2,\ 1),\ B(2,\ -3,\ -2).$

5.15. $B\left(\frac{2}{3},\ 1,\ -\frac{3}{4}\right),\ A\left(-\frac{3}{2},\ 2,\ 0\right).$

5.16. $B(-0{,}6,\ -0{,}5,\ 0{,}25),\ A(0{,}6,\ 0,\ -1{,}2).$

Изобразить вектора, если заданы их координаты. Записать разложение данных векторов по базису $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$.

5.17. $\vec{a}=\{1,\ 2\},\ \vec{b}=\{-1,\ 2\}.$

5.18. $\vec{a}=\{1,\ -2\},\ \vec{b}=\{-1,\ -2\}.$

5.19. $\vec{a}=\{0,\ 3\},\ \vec{b}=\{2,\ 0\}.$

5.20. $\vec{a}=\{0,\ -2\},\ \vec{b}=\{-3,\ 0\}.$

5.21. $\vec{a}=\{1,\ 1,\ 2\}$, $\vec{b}=\{-1,\ 3,\ 2\}$.

5.22. $\vec{a}=\{1,\ -1,\ 2\}$, $\vec{b}=\{1,\ -3,\ 1\}$.

5.23. $\vec{a}=\{-1,\ -1,\ 0\}$, $\vec{b}=\{-1,\ 0,\ -1\}$.

5.24. $\vec{a}=\{0,\ 1,\ -1\}$, $\vec{b}=\{0,\ -1,\ -1\}$.

Заданы координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти координаты вектора $\vec{c}$ и вычислить его длину.

5.25. $\vec{a}=\{1,\ 2\}$, $\vec{b}=\{-1,\ 2\}$; $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$.

5.26. $\vec{a}=\{1,\ -2\}$, $\vec{b}=\{-1,\ -2\}$; $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.

5.27. $\vec{a}=\{0,\ 3\}$, $\vec{b}=\{2,\ 0\}$; $\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}$.

5.28. $\vec{a}=\{0,\ -2\}$, $\vec{b}=\{-3,\ 0\}$; $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$.

5.29. $\vec{a}=\{1,\ 1,\ 2\}$, $\vec{b}=\{-1,\ 3,\ 2\}$; $\vec{c}=-\vec{a}-\vec{b}$.

5.30. $\vec{a}=\{1,\ -1,\ 2\}$, $\vec{b}=\{1,\ -3,\ 1\}$; $\vec{c}=\vec{b}-2\vec{a}$.

5.31. $\vec{a}=\{-1,\ -1,\ 0\}$, $\vec{b}=\{-1,\ 0,\ -1\}$; $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}$.

5.32. $\vec{a}=\{0,\ 1,\ -1\}$, $\vec{b}=\{0,\ -1,\ -1\}$; $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$.

Заданы координаты начала вектора $\overrightarrow{AB}$ и его координаты. Найти координаты конца вектора.

5.33. $A\,(2,\ 1)$, $\overrightarrow{AB}=\{-1,\ 0\}$.

5.34. $A\,(-2,\ 2)$, $\overrightarrow{AB}=\{0,\ 2\}$.

5.35. $A\,(0,\ -1)$, $\overrightarrow{AB}=\left\{\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{2}\right\}$.

5.36. $A\,(1,\ 0)$, $\overrightarrow{AB}=\{0{,}75,\ 0{,}3\}$.

5.37. $A\,(-2,\ 1,\ 3)$, $\overrightarrow{AB}=\{-1,\ 0,\ 2\}$.

5.38. $A\,(2,\ -1,\ -1)$, $\overrightarrow{AB}=\{1,\ -2,\ 0\}$.

5.39. $A\left(\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{2}{5},\ \dfrac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{AB}=\left\{\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{4},\ -\dfrac{1}{3}\right\}$.

5.40. $A\,(0{,}2,\ 1,\ 0{,}25)$, $\overrightarrow{AB}=\{0{,}7,\ 0{,}3,\ 0{,}8\}$.

Заданы координаты вершин треугольника. Найти координаты точек пересечения сторон и медиан треугольника.

5.41. $A\,(2,\ 1)$, $B\,(-3,\ 2)$, $C\,(2,\ 0)$.

5.42. $A(-2, 1)$, $B(3, 2)$, $C(0, 3)$.

5.43. $A(0, 0, 0)$, $B(1, 2, 2)$, $C(-1, 1, 2)$.

5.44. $A(-2, 1, 1)$, $B(0, 0, 0)$, $C(3, -2, 1)$.

5.45. $A(2, -3, 2)$, $B(1, -2, 1)$, $C(3, 5, 4)$.

5.46. $A(3, 0, 3)$, $B(1, 1, 2)$, $C(-1, 2, 1)$.

Заданы три вершины параллелограмма. Найти координаты четвертой вершины и точки пересечения диагоналей.

5.47. $A(0, 0)$, $B(1, 2)$, $C(-3, 2)$.

5.48. $A(4, 1)$, $B(0, 0)$, $D(1, 0)$.

5.49. $A(1, 3)$, $B(2, 5)$, $C(-4, 1)$.

5.50. $B(-3, 2)$, $C(0, 2)$, $D(5, 0)$.

5.51. $A(0, 0, 0)$, $B(-3, 2, 1)$, $C(2, 3, 5)$.

5.52. $B(0, 0, 0)$, $C(0, -2, 3)$, $D(-2, 1, 1)$.

Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5.53. $|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=3,\ \varphi=\frac{\pi}{3}$.

5.54. $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3,\ \varphi=\frac{\pi}{6}$.

5.55. $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=2,\ \varphi=-\frac{\pi}{2}$.

5.56. $|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=5,\ \varphi=\frac{2\pi}{3}$.

5.57. $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=1,\ \varphi=0$.

5.58. $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3,\ \varphi=\pi$.

5.59. $|\vec{a}|=5,\ |\vec{b}|=2,\ \varphi=\frac{3\pi}{4}$.

5.60. $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=2,\ \varphi=-\frac{5\pi}{6}$.

Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=3$, угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\frac{\pi}{3}$.

5.61. $\vec{a}=\vec{p}+\vec{q},\ \vec{b}=\vec{p}-\vec{q}$.

5.62. $\vec{a}=\vec{b}=2\vec{p}+\vec{q}$

5.63. $\vec{a}=2\vec{p}-3\vec{q},\ \vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}$.

5.64. $\vec{a}=3\vec{p}-2\vec{q},\ \vec{b}=\vec{p}+\vec{q}$.

5.65. $\vec{a}=\frac{1}{3}\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{q},\ \vec{b}=\vec{p}+\frac{1}{4}\vec{q}$.

5.66. $\vec{a}=\frac{1}{5}\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{q},\ \vec{b}=3\vec{p}-\frac{1}{3}\vec{q}$.

Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5.67. $\vec{a}=\{2,\ 1\},\ \vec{b}=\{-1,\ 3\}$. **5.68.** $\vec{a}=\{0,\ -3\},\ \vec{b}=\{3,\ 1\}$.

5.69. $\vec{a}=\{-1,\ 2,\ 1\},\ \vec{b}=\{2,\ 0,\ 2\}$.

5.70. $\vec{a}=\{2,\ -2,\ 1\},\ \vec{b}=\{1,\ 2,\ 2\}$.

5.71. $\vec{a}=\{2,\ 3,\ 7\},\ \vec{b}=\{-2,\ 1,\ 1\}$.

5.72. $\vec{a}=\{1,\ -3,\ 5\},\ \vec{b}=\{2,\ 1,\ 1\}$.

5.73. $\vec{a}=\left\{3,\ -2,\ \dfrac{1}{5}\right\},\ \vec{b}=\left\{-\dfrac{1}{3},\ 2,\ -\dfrac{1}{2}\right\}$.

5.74. $\vec{a}=\left\{-\dfrac{1}{4},\ 2,\ 1\right\},\ \vec{b}=\left\{1,\ \dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{5}\right\}$.

Выяснить, являются ли ортогональными вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5.75. $\vec{a}=\{3,\ 1\},\ \vec{b}=\{-1,\ 3\}$. **5.76.** $\vec{a}=\{0,\ 2\},\ \vec{b}=\{-2,\ 0\}$.

5.77. $\vec{a}=\{1,\ 3,\ 2\},\ \vec{b}=\{-3,\ 1,\ 0\}$.

5.78. $\vec{a}=\{2,\ 1,\ -1\},\ \vec{b}=\{1,\ 0,\ 2\}$.

5.79. $\vec{a}=\{1,\ -2,\ 1\},\ \vec{b}=\{2,\ 1,\ 3\}$.

5.80. $\vec{a}=\{-2,\ 1,\ 2\},\ \vec{b}=\{2,\ 3,\ 2\}$.

5.81. $\vec{a}=\{-2,\ 1,\ 3\},\ \vec{b}=\{2,\ 1,\ 1\}$.

5.82. $\vec{a}=\{3,\ 1,\ -2\},\ \vec{b}=\{3,\ 1,\ 5\}$.

Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5.83. $\vec{a}=\{2,\ 2\},\ \vec{b}=\{3,\ 0\}$.

5.84. $\vec{a}=\{-1,\ 1\},\ \vec{b}=\{2,\ 0\}$.

5.85. $\vec{a}=\{0,\ -2\},\ \vec{b}=\left\{1,\ \sqrt{3}\right\}$.

5.86. $\vec{a}=\left\{-2,\ -2\sqrt{3}\right\},\ \vec{b}=\left\{1,\ -\sqrt{3}\right\}$.

5.87. $\vec{a}=\{2,\ -1,\ 2\},\ \vec{b}=\{-4,\ 2,\ -4\}$.

5.88. $\vec{a}=\left\{1,\ \sqrt{3},\ -\sqrt{3}\right\},\ \vec{b}=\left\{\sqrt{3},\ 3,\ -3\right\}$.

5.89. $\vec{a}=\{0,\ 1,\ 1\}$, $\vec{b}=\{1,\ 1,\ 0\}$.

5.90. $\vec{a}=\{-2,\ 0,\ 2\}$, $\vec{b}=\{0,\ 2,\ -2\}$.

5.91. $\vec{a}=\{2,\ -4,\ 4\}$, $\vec{b}=\{-3,\ 2,\ 6\}$.

5.92. $\vec{a}=\{3,\ 1,\ -1\}$, $\vec{b}=\{-1,\ 3,\ 2\}$.

Выяснить, является ли прямоугольным треугольник ABC.

5.93. $A(0,\ 0)$, $B(3,\ 3)$, $C(-4,\ 4)$.

5.94. $A(-1,\ -2)$, $B(2,\ 1)$, $C(4,\ -1)$.

5.95. $A(-3,\ 5,\ 6)$, $B(1,\ -5,\ 7)$, $C(8,\ -3,\ -1)$.

5.96. $A(1,\ -5,\ 7)$, $B(8,\ -3,\ -1)$, $C(4,\ 7,\ -2)$.

5.97. $A(2,\ -3,\ 2)$, $B(1,\ -2,\ 1)$, $C(3,\ 5,\ 4)$.

5.98. $A(3,\ 0,\ 3)$, $B(1,\ 1,\ 2)$, $C(-1,\ 2,\ 1)$.

Найти модуль векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5.99. $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$, $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$. **5.100.** $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$.

5.101. $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=2$, $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$. **5.102.** $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=5$, $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$.

5.103. $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$, $\varphi=0$. **5.104.** $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $\varphi=\pi$.

5.105. $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=2$, $\varphi=\dfrac{3\pi}{4}$. **5.106.** $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\varphi=\dfrac{5\pi}{6}$.

Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=3$, угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\dfrac{\pi}{6}$.

5.107. $\vec{a}=\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-\vec{q}$. **5.108.** $\vec{a}=\vec{b}=2\vec{p}+\vec{q}$.

5.109. $\vec{a}=2\vec{p}-3\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}$. **5.110.** $\vec{a}=3\vec{p}-2\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+\vec{q}$.

5.111. $\vec{a}=\dfrac{1}{3}\vec{p}+\dfrac{1}{2}\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+\dfrac{1}{4}\vec{q}$.

5.112. $\vec{a}=\dfrac{1}{5}\vec{p}-\dfrac{1}{2}\vec{q}$, $\vec{b}=3\vec{p}-\dfrac{1}{3}\vec{q}$.

Найти векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Убедиться, что вектор $\vec{c}=[\vec{a}, \vec{b}]$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5.113. $\vec{a}=\{2, 1\}$, $\vec{b}=\{-1, 3\}$.

5.114. $\vec{a}=\{0, -3\}$, $\vec{b}=\{3, 1\}$.

5.115. $\vec{a}=\{-1, 2, 1\}$, $\vec{b}=\{2, 0, 2\}$.

5.116. $\vec{a}=\{2, -2, 1\}$, $\vec{b}=\{1, 2, 2\}$.

5.117. $\vec{a}=\{2, 3, 7\}$, $\vec{b}=\{-2, 1, 1\}$.

5.118. $\vec{a}=\{1, -3, 5\}$, $\vec{b}=\{2, 1, 1\}$.

5.119. $\vec{a}=\left\{3, -2, \frac{1}{5}\right\}$, $\vec{b}=\left\{-\frac{1}{3}, 2, -\frac{1}{2}\right\}$.

5.120. $\vec{a}=\left\{-\frac{1}{4}, 2, 1\right\}$, $\vec{b}=\left\{1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{5}\right\}$.

Определить, коллинеарны ли данные вектора.

5.121. $\vec{a}=\{1, 2\}$, $\vec{b}=\{-2, 4\}$.

5.122. $\vec{a}=\{-1, 3\}$, $\vec{b}=\{-2, 6\}$.

5.123. $\vec{a}=\{2, 1\}$, $\vec{b}=\{2, 2\}$.

5.124. $\vec{a}=\{-1, 3\}$, $\vec{b}=\{-2, 3\}$.

5.125. $\vec{a}=\{1, -1, 2\}$, $\vec{b}=\{2, -2, 4\}$.

5.126. $\vec{a}=\{1, -1, 2\}$, $\vec{b}=\{2, -1, 1\}$.

5.127. $\vec{a}=\{-1, 1, -2\}$, $\vec{b}=\{2, -1, 1\}$.

5.128. $\vec{a}=\{-1, 1, -2\}$, $\vec{b}=\{1, -1, 2\}$.

Проверить, является ли четырехугольник $ABCD$ параллелограммом, и вычислить его площадь.

5.129. $A(0, 0)$, $B(0, 4)$, $C(4, 8)$, $D(4, 4)$.

5.130. $A(-1, -4)$, $B(-1, 1)$, $C(2, -2)$, $D(2, -7)$.

5.131. $A(-2, 1)$, $B(-4, 6)$, $C(1, 7)$, $D(3, 2)$.

5.132. $A(-2, -3)$, $B(0, 2)$, $C(3, 5)$, $D(1, 0)$.

5.133. $A(0, 0, 0)$, $B(-1, 2, 1)$, $C(1, 2, 3)$, $D(2, 0, 2)$.

5.134. $A(0, 0, 0)$, $B(2, -2, 1)$, $C(3, 0, 3)$, $D(1, 2, 2)$.

5.135. $A(1, -2, -3)$, $B(3, 1, 4)$, $C(1, 2, 5)$, $D(-1, -1, -2)$.

5.136. $A(2, 2, -1)$, $B(3, -1, 4)$, $C(5, 0, 5)$, $D(4, 3, 0)$.

Вычислить площадь треугольника ABC.

5.137. $A(0, 0)$, $B(3, 3)$, $C(-4, 4)$.

5.138. $A(-1, -2)$, $B(2, 1)$, $C(4, -1)$.

5.139. $A(-3, 5, 6)$, $B(1, -5, 7)$, $C(8, -3, -1)$.

5.140. $A(1, -5, 7)$, $B(8, -3, -1)$, $C(4, 7, -2)$.

5.141. $A(2, -3, 2)$, $B(1, -2, 1)$, $C(3, 5, 4)$.

5.142. $A(3, 0, 3)$, $B(1, 1, 2)$, $C(1, 2, 1)$.

5.143. $A(1, 2, 0)$, $B(3, 0, -3)$, $C(5, 2, 6)$.

5.144. $A(1, -1, 2)$, $B(5, -6, 2)$, $C(1, 3, -1)$.

Вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

5.145. $\vec{a} = \{2,\ 0,\ 0\}$, $\vec{b} = \{3,\ 2,\ -1\}$, $\vec{c} = \{1,\ -1,\ 3\}$.

5.146. $\vec{a} = \{0,\ -3,\ 0\}$, $\vec{b} = \{2,\ 4,\ -1\}$, $\vec{c} = \{-1,\ -2,\ 3\}$.

5.147. $\vec{a} = \{2,\ 3,\ 1\}$, $\vec{b} = \{1,\ 2,\ -1\}$, $\vec{c} = \{2,\ -1,\ 2\}$.

5.148. $\vec{a} = \left\{2,\ -1,\ \dfrac{2}{3}\right\}$, $\vec{b} = \left\{\dfrac{1}{2},\ 2,\ -1\right\}$, $\vec{c} = \{2,\ -1,\ 5\}$.

5.149. $\vec{a} = \{-1,\ 2,\ 1\}$, $\vec{b} = \{2,\ 0,\ 2\}$, $\vec{c} = \{1,\ 2,\ 3\}$.

5.150. $\vec{a} = \{-1,\ 1,\ -2\}$, $\vec{b} = \{1,\ -1,\ 2\}$, $\vec{c} = \{2,\ -2,\ 4\}$.

Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

5.151. $\vec{a} = \{1,\ 1,\ 1\}$, $\vec{b} = \{4,\ 3,\ 0\}$, $\vec{c} = \{1,\ 0,\ 3\}$.

5.152. $\vec{a} = \{2,\ -1,\ -2\}$, $\vec{b} = \{3,\ 2,\ 1\}$, $\vec{c} = \{1,\ -2,\ 9\}$.

5.153. $\vec{a} = \{1,\ -5,\ 0\}$, $\vec{b} = \{3,\ 2,\ 1\}$, $\vec{c} = \{1,\ -1,\ 3\}$.

5.154. $\vec{a} = \{1,\ 1,\ 0\}$, $\vec{b} = \{-7,\ 2,\ -1\}$, $\vec{c} = \{1,\ 4,\ 3\}$.

Вычислить объем тетраэдра с вершинами в заданных точках.

5.155. $A(1, -1, 2)$, $B(2, 1, 2)$, $C(1, 1, 4)$, $D(6, -3, 8)$.

5.156. $A(2, -4, -3)$, $B(5, -6, 0)$, $C(-1, 3, -3)$, $D(-10, -8, 7)$.

5.157. $A(-3, -5, 6)$, $B(2, 1, -4)$, $C(0, -3, -1)$, $D(-5, 2, -8)$.

5.158. $A(-2, -1, -1)$, $B(0, 3, 2)$, $C(3, 1, -4)$, $D(-4, 7, 3)$.

Определить, лежат ли данные точки в одной плоскости.

5.159. $A(1,-2,-3)$, $B(3,1,4)$, $C(1,2,5)$, $D(-1,-1,-2)$.

5.160. $A(2,2,-1)$, $B(3,-1,4)$, $C(5,0,5)$, $D(4,3,0)$.

5.161. $A(1,2,2)$, $B(2,2,2)$, $C(1,1,1)$, $D(1,1,2)$.

5.162. $A(2,3,1)$, $B(1,-1,7)$, $C(5,5,5)$, $D(1,-6,0)$.

5.163. $A(2,-3,2)$, $B(1,-2,1)$, $C(3,5,4)$.

5.164. $A(3,0,3)$, $B(1,1,2)$, $C(-1,2,1)$.

Определить, является тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ правой или левой.

5.165. $\vec{a}=\{1,\ 1,\ 1\}$, $\vec{b}=\{4,\ -1,\ 0\}$, $\vec{c}=\{1,\ 0,\ 0\}$.

5.166. $\vec{a}=\{1,\ 0,\ 0\}$, $\vec{b}=\{0,\ 3,\ 0\}$, $\vec{c}=\{1,\ 0,\ 3\}$.

5.167. $\vec{a}=\{2,\ -2,\ 1\}$, $\vec{b}=\{1,\ 2,\ -1\}$, $\vec{c}=\{2,\ 1,\ 2\}$.

5.168. $\vec{a}=\{1,\ 3,\ 1\}$, $\vec{b}=\{0,\ 2,\ 0\}$, $\vec{c}=\{2,\ -1,\ 2\}$.

6. ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Определить, какие уравнения задают плоскость в пространстве соответствующих переменных.

6.1. $3x+4y+5z^2-1=0$.

6.2. $x-2y=0$.

6.3. $2t+xu+x+99=0$.

6.4. $2x-2y-2z+w=0$.

6.5. $x^2=4$.

6.6. $y^2=0$.

6.7. $z-2y+x=0$.

6.8. $z=2x-3y$.

6.9. $u=t+3u-v$.

6.10. $w=2x$.

Записать уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно нормальному вектору $\vec{N}$.

6.11. $M_0\ (1,\ 2,\ 0)$, $\vec{N}=\{-3,\ 2,\ 1\}$.

6.12. $M_0\ (0,\ 0,\ 0)$, $\vec{N}=\{-1,\ 3,\ -2\}$.

6.13. $M_0\ (-2,\ 1,\ 1)$, $\vec{N}=\{3,\ -1,\ -1\}$.

6.14. $M_0\ (3,\ -2,\ -1)$, $\vec{N}=\{-1,\ 2,\ -3\}$.

6.15. $M_0\ (3,\ -2,\ 2)$, $\vec{N}=\{1,\ 0,\ 0\}$.

6.16. $M_0\ (2,\ 0,\ -1)$, $\vec{N}=\{0,\ 1,\ 0\}$.

Найти нормальный вектор и какую-либо точку данной плоскости.

6.17. $2x+3y-z+1=0$. **6.18.** $x-2y+z-3=0$.

6.19. $x-2y=0$. **6.20.** $z+3x=0$.

6.21. $x=2$. **6.22.** $y=-3$.

Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1,\ 2,\ 3)$, параллельно данной плоскости.

6.23. $2x+3y-z+1=0$. **6.24.** $-2x+y+5z-3=0$.

6.25. $3x+5y=0$. **6.26.** $2x-3z=0$.

6.27. $y=-2$. **6.28.** $z=-3$.

Плоскость отсекает на координатных осях отрезки a, b, c. Записать уравнение этой плоскости и преобразовать его к общему виду.

6.29. $a=1,\ b=2,\ c=3$. **6.30.** $a=-1,\ b=3,\ c=-2$.

6.31. $a=-3,\ b=2,\ c=\infty$. **6.32.** $a=-1,\ b=\infty,\ c=3$.

6.33. $c=2,\ b=\infty,\ a=\infty$. **6.34.** $b=-1,\ a=\infty,\ c=0$.

Определить, какие отрезки отсекает на координатных осях данная плоскость.

6.35. $2x+3y-z+6=0$. **6.36.** $x-3y+4z-12=0$.

6.37. $z=2-3y+x$. **6.38.** $z=2x-3y+2$.

6.39. $2x+3y-1=0$. **6.40.** $2y-3z+1=0$.

6.41. $x-3=0$. **6.42.** $z+2=0$.

Найти объем тетраэдра $V=\dfrac{1}{3}S_g h$, образованного координатными плоскостями и заданной плоскостью.

6.43. $2x+3y-z+6=0$.

6.44. $x-3y+4z-12=0$.

6.45. $-x+2y+z+3=0$.

6.46. $2x-y+3z+1=0$.

6.47. $M_0\ (-2,\ 1,\ 1)$, $\vec{N}=\{3,\ 1,\ -1\}$.

6.48. $M_0\ (3,\ -2,\ -1)$, $\vec{N}=\{-1,\ 2,\ 3\}$.

Изобразить плоскость, заданную уравнением.

6.49. $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{3}=1.$

6.50. $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{-4}=1.$

6.51. $x=3,\ y=-1,\ y=2.$

6.52. $x=-2,\ z=2,\ z=-2.$

6.53. $x-y=0,\ y=2x.$

6.54. $x+y=0,\ y=-2x.$

6.55. $z=2x,\ z=-2y.$

6.56. $z=-x,\ z=y.$

6.57. $x-y+2=0.$

6.58. $z+x-1=0.$

Найти уравнение плоскости, проходящей через 3 заданные точки, определить, какие отрезки она отсекает на координатных осях.

6.59. $M_1(2,\ 3,\ 2),\ M_2(1,\ 0,\ 0),\ M_3(0,\ -2,\ 0).$

6.60. $M_1(0,\ 0,\ -3),\ M_2(3,\ 1,\ -1),\ M_3(0,\ 2,\ 0).$

6.61. $M_1(0,\ 0,\ 2),\ M_2(-1,\ 1,\ 1),\ M_3(2,\ 1,\ 1).$

6.62. $M_1(3,\ 1,\ 2),\ M_2(1,\ 0,\ 0),\ M_3(2,\ 1,\ 2).$

6.63. $M_1(1,\ -1,\ 2),\ M_2(0,\ 1,\ -3),\ M_3(-1,\ 2,\ 0).$

6.64. $M_1(0,\ 1,\ -2),\ M_2(-1,\ 3,\ 2),\ M_3(-1,\ -1,\ 0).$

Найти уравнение плоскости, проходящей через данную точку параллельно двум неколлинеарным векторам.

6.65. $M_0\ (0,\ 0,\ 0),\ \ \vec{a}=\{1,\ 2,\ -1\},\ \ \vec{b}=\{1,\ 0,\ 1\}.$

6.66. $M_0\ (0,\ 0,\ 0),\ \ \vec{a}=\{0,\ 1,\ 2\},\ \ \vec{b}=\{3,\ -1,\ 1\}.$

6.67. $M_0\ (1,\ 2,\ -1),\ \ \vec{a}=\{2,\ 1,\ 3\},\ \ \vec{b}=\{0,\ 0,\ 2\}.$

6.68. $M_0\ (0,\ -2,\ 3),\ \ \vec{a}=\{-1,\ 3,\ 1\},\ \ \vec{b}=\{1,\ 0,\ 0\}.$

6.69. $M_0\ (2,\ 1,\ 3),\ \ \vec{a}=\{3,\ 0,\ 0\},\ \ \vec{b}=\{0,\ 2,\ 0\}.$

6.70. $M_0\ (1,\ -1,\ 2),\ \ \vec{a}=\{0,\ -1,\ 0\},\ \ \vec{b}=\{1,\ 0,\ 0\}.$

7. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Найти канонические уравнения прямой, проходящей через заданную точку параллельно направляющему вектору $\vec{P}$. Преобразовать эти уравнения к общему виду.

7.1. $M_0\ (2,\ 1,\ 3),\ \ \vec{P}=\{-4,\ 5,\ 6\}.$

7.2. $M_0\ (-1,\ 2,\ -1),\ \ \vec{P}=\{2,\ -3,\ 5\}.$

7.3. $M_0\ (0,\ 1,\ 2),\ \ \vec{P}=\{1,\ -2,\ 0\}.$

7.4. $M_0(2,\ 0,\ 1),\ \ \vec{P}=\{0,\ -2,\ 3\}.$

7.5. $M_0\ (0,\ 1,\ 0),\ \ \vec{P}=\{0,\ 3,\ 0\}.$

7.6. $M_0\ (-5,\ 1,\ 3),\ \ \vec{P}=\{0,\ 0,\ 2\}.$

7.7. $M_0\left(\frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{3}\right),\ \ \vec{P}=\left\{-\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{3}\right\}.$

7.8. $M_0\left(-\frac{1}{5},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right),\ \ \vec{P}=\left\{0,\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{3}\right\}.$

Найти канонические уравнения прямой, проходящей через две заданные точки.

7.9. $M_1(2,\ 3,\ 2),\ M_2(1,\ 0,\ 0).$

7.10. $M_1(0,\ 0,\ -3),\ M_2(3,\ 1,\ -1).$

7.11. $M_1(0,\ 0,\ 2),\ M_2(-1,\ 1,\ 1).$

7.12. $M_1(3,\ 1,\ 2),\ M_2(1,\ 0,\ 0).$

7.13. $M_1(1,\ -1,\ 2),\ M_2(0,\ 1,\ -3).$

7.14. $M_1(0,\ 1,\ -2),\ M_2(-1,\ 3,\ 2).$

Найти какую-либо точку, лежащую на данной прямой.

7.15. $\begin{cases} x-3=0, \\ y+5=0. \end{cases}$

7.16. $\begin{cases} y+1=0, \\ z-3=0. \end{cases}$

7.17. $\begin{cases} x-5=0, \\ y+2z-1=0. \end{cases}$

7.18. $\begin{cases} x-2y+1=0, \\ z-2=0. \end{cases}$

7.19. $\begin{cases} x-2y+1=0, \\ y-2z-2=0. \end{cases}$

7.20. $\begin{cases} 2x+z-3=0, \\ x-2y=0. \end{cases}$

7.21. $\begin{cases} 2x-3y+z-1=0, \\ 3x+2y-2z+5=0. \end{cases}$

7.22. $\begin{cases} x-2y+2z+1=0, \\ 2x+y-z-3=0. \end{cases}$

Найти какой-либо вектор, перпендикулярный двум заданным.

7.23. $\vec{a}=\{0,\ 0,\ 1\},\ \ \vec{b}=\{1,\ 2,\ 3\}.$

7.24. $\vec{a}=\{1,\ 0,\ 0\},\ \ \vec{b}=\{-3,\ 2,\ -1\}.$

7.25. $\vec{a}=\{1,\ 0,\ -1\},\ \vec{b}=\{1,\ -3,\ 2\}.$

7.26. $\vec{a}=\{3,\ -4,\ 1\},\ \vec{b}=\{0,\ -3,\ 0\}.$

7.27. $\vec{a}=\{3,\ -2,\ 7\},\ \vec{b}=\{7,\ 12,\ -5\}.$

7.28. $\vec{a}=\{-3,\ 5,\ 11\},\ \vec{b}=\{-3,\ 7,\ 5\}.$

7.29. $\vec{a}=\left\{\frac{1}{2},\ 3,\ -1\right\},\ \vec{b}=\left\{1,\ -\frac{1}{3},\ 5\right\}.$

7.30. $\vec{a}=\left\{\frac{1}{3},\ -1,\ 1\right\},\ \vec{b}=\{-1,\ 3,\ -3\}.$

Привести к канонической форме общие уравнения прямой.

7.31. $\begin{cases}2x-3y-2z+6=0,\\ x-3y+z+3=0.\end{cases}$

7.32. $\begin{cases}6x-5y+3z+8=0,\\ 6x+5y-4z+4=0.\end{cases}$

7.33. $\begin{cases}3x+3y+z-1=0,\\ 2x-3y-2z+6=0.\end{cases}$

7.34. $\begin{cases}3x+4y+3z+1=0,\\ 2x-4y-2z+4=0.\end{cases}$

7.35. $\begin{cases}2x+3y-2z+6=0,\\ x-3y+z+3=0.\end{cases}$

7.36. $\begin{cases}x-3y+z+2=0,\\ x+3y+2z+14=0.\end{cases}$

Записать в параметрической форме данные канонические уравнения.

7.37. $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{3}.$

7.38. $\frac{x+1}{-3}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+4}{1}.$

7.39. $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+2}{3}.$

7.40. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{0}.$

7.41. $\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z-3}{7}.$

7.42. $\frac{x}{-3}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+2}{0}.$

Привести к параметрической форме общие уравнения прямой.

7.43. $\begin{cases}3x+2y+z-1=0,\\ 2x-3y-4z+6=0.\end{cases}$

7.44. $\begin{cases}-2x+3y+2z-1=0,\\ x-3y+z+6=0.\end{cases}$

7.45. $\begin{cases}3x+z-1=0,\\ -3y-2z+1=0.\end{cases}$

7.46. $\begin{cases}2y+z-2=0,\\ 2x+y-2z+6=0.\end{cases}$

Привести к общему виду данные уравнения прямой.

7.47. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{-3}.$

7.48. $\dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+4}{-1}.$

7.49. $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y+3}{0}=\dfrac{z+2}{3}.$

7.50. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{0}.$

7.51. $\begin{cases} x=2t, \\ y=-t, \\ z=t+1. \end{cases}$

7.52. $\begin{cases} x=t, \\ y=-2t, \\ z=3t. \end{cases}$

7.53. $\begin{cases} x=0, \\ y=2t, \\ z=2t-1. \end{cases}$

7.54. $\begin{cases} x=-t, \\ y=0, \\ z=t+2. \end{cases}$

7.55. $\begin{cases} x=0, \\ y=-t+2, \\ z=0. \end{cases}$

7.56. $\begin{cases} x=3t, \\ y=0, \\ z=0. \end{cases}$

8. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Найти уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно прямой.

8.1. $M_0(1,\ 2,\ 3),\ \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-3}.$

8.2. $M_0(-1,\ 0,\ 2),\ \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-3}.$

8.3. $M_0(0,\ -2,\ 1),\ \dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z-1}{-3}.$

8.4. $M_0(1,\ 2,\ 0),\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{0}.$

8.5. $M_0(0,\ 2,\ 1),\ \begin{cases} x=0, \\ y=2t, \\ z=2t-1. \end{cases}$

8.6. $M_0(0,\ 2,\ 1),\ \begin{cases} x=-t, \\ y=0, \\ z=t+2. \end{cases}$

8.7. $M_0(-2,\ 2,\ 1),\ \begin{cases} x=0, \\ y=-t+2, \\ z=0. \end{cases}$

8.8. $M_0(-2,\ 0,\ 1),\ \begin{cases} x=3t, \\ y=0, \\ z=0. \end{cases}$

8.9. $M_0(-2, -3, 1)$, $\begin{cases} x-2y+1=0, \\ y-2z-2=0. \end{cases}$

8.10. $M_0(-2, 3, 1)$, $\begin{cases} x-2y+2z+1=0, \\ 2x+y-z-3=0. \end{cases}$

Найти уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно плоскости.

8.11. $M_0(1, 2, 3)$, $2x+3y-z+1=0$.

8.12. $M_0(-2, 0, 1)$, $-2x+y+5z-3=0$.

8.13. $M_0(-2, 2, 1)$, $3x+5y=0$.

8.14. $M_0(-2, -3, 1)$, $2x-3z=0$.

8.15. $M_0\ (0, 2, 1)$, $\frac{x}{1}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{3}=1$.

8.16. $M_0\ (3, 2, 1)$, $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-4}=1$.

8.17. $M_0(-1, 2, -1)$, $x=0$.

8.18. $M_0(5, 3, -4)$, $z=3$.

Определить, пересекаются ли прямая и плоскость, и найти точку пересечения.

8.19. $\begin{cases} x=0, \\ y=2t, \\ z=2t-1; \end{cases}$ $x+2y+1=0$.

8.20. $\begin{cases} x=-t, \\ y=0, \\ z=t+2; \end{cases}$ $2x+5z-1=0$.

8.21. $\begin{cases} x=t, \\ y=2t, \\ z=3t-1; \end{cases}$ $-3x+z+4=0$.

8.22. $\begin{cases} x=0, \\ y=t, \\ z=2t-2; \end{cases}$ $-3x+2y-z-2=0$.

8.23. $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{3}$; $2x+3y-z+1=0$.

8.24. $\frac{x+1}{-3}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+4}{1}$; $-2x+y+5z-3=0$.

8.25. $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+2}{3}$; $x+2y-3z+1=0$.

8.26. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{0}$; $x-y-z+4=0$.

Найти точку M_1, симметричную точке M_0 относительно заданной плоскости.

8.27. $M_0(-2, 0, 3)$, $2x-2y+10z+1=0$.

8.28. $M_0(3, 3, 3)$, $8x+6y+8z-25=0$.

8.29. $M_0(-1, 0, 1)$, $2x+4y-3=0$.

8.30. $M_0(2, -2, -3)$, $y+z+2=0$.

8.31. $M_0(-2, -3, 0)$, $x+5y+4=0$.

8.32. $M_0(3, -3, -1)$, $2x-4y-4z-13=0$.

Найти точку M_1, симметричную точке M_0 относительно заданной прямой.

8.33. $M_0(0, -3, -2)$, $\frac{x-0{,}5}{0}=\frac{y+1{,}5}{-1}=\frac{z-1{,}5}{1}$.

8.34. $M_0(-1, 0, 1)$, $\frac{x-0{,}5}{0}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-4}{2}$.

8.35. $M_0(2, -2, -3)$, $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+0{,}5}{0}=\frac{z+1{,}5}{0}$.

8.36. $M_0(-1, 2, 0)$, $\frac{x+0{,}5}{1}=\frac{y+0{,}7}{-0{,}2}=\frac{z-2}{2}$.

8.37. $M_0(3, 3, 3)$, $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1{,}5}{0}=\frac{z-3}{1}$.

8.38. $M_0(3, -3, -1)$, $\frac{x-6}{5}=\frac{y-3{,}5}{4}=\frac{z+0{,}5}{0}$.

9. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Определить координаты центра и радиус сферы, заданной уравнением.

9.1. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=1$.

9.2. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=4$.

9.3. $x^2+y^2+z^2-6z=0.$

9.4. $x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-19=0.$

9.5. $x^2+y^2+z^2-3x+2y-z=0.$

9.6. $x^2+y^2+z^2+x-5y-7z=0.$

Определить, как расположена точка $A\,(2,\ -1,\ 3)$ относительно заданной сферы.

9.7. $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=1.$

9.8. $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4.$

9.9. $(x+14)^2+(y-1)^2+(z+12)^2=625.$

9.10. $(x-6)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=25.$

9.11. $x^2+y^2+z^2-4x+6y-8z+22=0.$

9.12. $x^2+y^2+z^2-x+3y-2z-3=0.$

Определить, какая кривая является линией пересечения плоскости и данной поверхности второго порядка.

9.13. $x^2+y^2+z^2-9=0,\ z=0.$

9.14. $x^2+y^2+z^2-8=0,\ y=-2.$

9.15. $x^2+y^2+z^2-2x+4y+4=0,\ z=0.$

9.16. $x^2+y^2+z^2-6x+2y-10z+22=0,\ z=3.$

9.17. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{4}=1,\ \ x=2.$

9.18. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{4}=1,\ \ y=2.$

9.19. $\dfrac{x^2}{32}-\dfrac{y^2}{18}+\dfrac{z^2}{2}=1,\ \ z+1=0.$

9.20. $\dfrac{x^2}{32}-\dfrac{y^2}{18}+\dfrac{z^2}{2}=1,\ \ y-3=0.$

9.21. $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=6z,\ \ y+6=0.$

9.22. $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=6z,\ \ z-1=0.$

9.23. $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{6}=2z,\ \ 3x-y+6z-14=0.$

9.24. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{36}=1,\ \ 9x-6y+2z-28=0.$

Найти точки пересечения поверхности и прямой.

9.25. $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1,\quad \frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z+2}{4}.$

9.26. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1,\quad \frac{x}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{4}.$

9.27. $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=z,\quad \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{-2}.$

9.28. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=z,\quad \frac{x}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{2}.$

Определить, является ли данная поверхность цилиндром или конусом, и построить ее.

9.29. $x^2+y^2-2x=0.$

9.30. $y^2+x^2+4y=0.$

9.31. $x^2+y^2-z^2=0.$

9.32. $y^2+z^2-x^2=0.$

9.33. $x^2+y^2-2z^2=0.$

9.34. $x^2+y^2-z^2+2z-1=0.$

9.35. $x^2-y^2+z^2=0.$

9.36. $x^2+y^2+2y=0.$

III. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1. МАТРИЦЫ, ДЕЙСТВИЯ С НИМИ. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Найти матрицу $\mathbf{X}$, выполнив указанные действия с матрицами.

1.1. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-5 & 4\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

а) $\mathbf{X}=2\mathbf{A}-\mathbf{B}+\mathbf{E}$; б) $\mathbf{X}=\mathbf{A}-3\mathbf{B}-5\mathbf{E}$; в) $\mathbf{X}=-6\mathbf{A}-3\mathbf{B}+10\mathbf{E}$;
г) $\mathbf{X}=\mathbf{A}-2\mathbf{E}$; д) $\mathbf{X}=3\mathbf{B}+5\mathbf{E}$; е) $\mathbf{X}=\mathbf{B}-2\mathbf{A}+2\mathbf{E}$;
ж) $\mathbf{X}=5\mathbf{E}-\mathbf{A}-\mathbf{B}$.

1.2. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

а) $\mathbf{X}=4\mathbf{A}+6\mathbf{B}+\mathbf{E}$; б) $\mathbf{X}=2\mathbf{A}-3\mathbf{B}+\mathbf{E}$; в) $\mathbf{X}=-\mathbf{A}+6\mathbf{B}-4\mathbf{E}$;
г) $\mathbf{X}=3\mathbf{A}-2\mathbf{E}$; д) $\mathbf{X}=2\mathbf{B}+5\mathbf{E}$; е) $\mathbf{X}=2\mathbf{B}-2\mathbf{A}+\mathbf{E}$;
ж) $\mathbf{X}=\mathbf{E}-\mathbf{A}+\mathbf{B}$.

1.3. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & -5\\ 5 & 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

а) $\mathbf{X}=\mathbf{A}-\mathbf{B}+\mathbf{E}$; б) $\mathbf{X}=\mathbf{A}+\mathbf{B}-\mathbf{E}$; в) $\mathbf{X}=-2\mathbf{A}-2\mathbf{B}+10\mathbf{E}$;
г) $\mathbf{X}=3\mathbf{A}-2\mathbf{E}$; д) $\mathbf{X}=\mathbf{B}+5\mathbf{E}$; е) $\mathbf{X}=4\mathbf{B}+\mathbf{A}-4\mathbf{E}$;
ж) $\mathbf{X}=\mathbf{E}-5\mathbf{A}-\mathbf{B}$.

1.4. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 5\\ -3 & 4 & 1\\ 7 & -4 & -1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}8 & -2 & 2\\ 5 & 1 & 4\\ 3 & -3 & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

а) $\mathbf{X}=2\mathbf{A}-\mathbf{B}+\mathbf{E}$; б) $\mathbf{X}=\mathbf{A}+\mathbf{B}+3\mathbf{E}$.

1.5. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 3 & 1 & -3\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}5 & 0 & 4\\ 0 & 3 & 0\\ -2 & 0 & 7\end{pmatrix}$, $\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

а) $\mathbf{X}=-3\mathbf{A}+\mathbf{B}+2\mathbf{E}$; б) $\mathbf{X}=4\mathbf{A}-\mathbf{B}-5\mathbf{E}$.

Найти указанные произведения матриц **A** и **B**: а) **AB**; б) **BA**; в) $\mathbf{A}^2$; г) $\mathbf{B}^2$; д) $\mathbf{A}^2\mathbf{B}$.

1.6. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 5 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 6 & 4\end{pmatrix}$.

1.7. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-4 & -3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}7 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

1.8. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

1.9. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 0 & -2\end{pmatrix}$.

1.10. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 2 & 4 & 0\\ 5 & 0 & 6\end{pmatrix}$.

1.11. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 5\\ 3 & -1 & 2\\ 7 & -3 & -9\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & -4 & 3\\ 2 & -2 & 7\\ 1 & -5 & 8\end{pmatrix}$.

1.12. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 6 & 3\\ 5 & -2 & 0\\ 4 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -3\\ 3 & -2 & 4\end{pmatrix}$.

1.13. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 5\\ 0 & -2 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Найти указанные произведения матриц.

1.14. $\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 5\end{pmatrix}$.

1.15. $\begin{pmatrix}3 & -4\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 7 & 9\\ 5 & -1 & 3\end{pmatrix}$.

1.16. $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1.17. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & -5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

1.18. $\begin{pmatrix} -1 & 9 \\ -2 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$.

1.19. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Выполнить умножение, применяя транспонирование.

1.20. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1.21. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^T$.

1.22. $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 20 & 30 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 20 & 30 \end{pmatrix}$.

1.23. $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1.24. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$.

Найти присоединенную матрицу к матрице.

1.25. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

1.26. $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$.

1.27. $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$.

1.28. $\begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$.

1.29. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

1.30. $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$.

1.31. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$.

1.32. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1.33. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 4 & -3 & 5 \\ -4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

1.34. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 5 & 5 & 1 \\ 5 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.

Найти обратную матрицу, сделать проверку.

1.35. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$. **1.36.** $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

1.37. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. **1.38.** $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 20 \end{pmatrix}$.

1.39. $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$. **1.40.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

1.41. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **1.42.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

1.43. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **1.44.** $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.45. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. **1.46.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1.47. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Решить матричные уравнения.

1.48. $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **1.49.** $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1.50. $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

1.51. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 9 & 0 \\ -6 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

1.52. $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. РАНГ МАТРИЦЫ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАТРИЦ

Найти ранг матрицы, вычислив ее миноры.

2.1. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

2.2. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -6 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

2.3. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

2.4. $\begin{pmatrix} 6 & 10 & -2 & 14 \\ 9 & 15 & -3 & 21 \end{pmatrix}$.

Найти ранг матрицы элементарными преобразованиями.

2.5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

2.6. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & -7 \end{pmatrix}$.

2.7. $\begin{pmatrix} -3 & 7 & 2 \\ -2 & 12 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

2.8. $\begin{pmatrix} 8 & -16 & 12 \\ 6 & -12 & 9 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

2.9. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 8 \\ -1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 7 & 5 & 18 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

2.10. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 & -4 \\ 10 & 2 & 11 & 7 \\ -15 & -3 & 5 & 11 \\ -5 & -1 & 16 & 3 \end{pmatrix}$.

2.11. $\begin{pmatrix} -4 & -12 & 8 & 10 \\ 3 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ -3 & -7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.12. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2.13. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2.14. $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ -8 & 2 & -1 & -3 & 1 \\ 7 & 2 & 3 & 3 & -1 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ГАУССА

Методом Гаусса решить систему однородных линейных уравнений, найти фундаментальную систему решений, общее решение и какое-либо частное решение системы.

3.1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

3.2. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 6x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 7x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

3.4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

3.6. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$

3.8. $\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 12x_1 - 7x_2 - 9x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 7x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_2 + 10x_3 + 5x_4 = 0, \\ -2x_1 + 7x_2 + 12x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 11x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$

3.11. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0, \\ -4x_1 - 2x_2 - 2x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

3.12. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

Установить совместность системы, методом Гаусса решить систему неоднородных линейных уравнений, найти фундаментальную систему решений, общее решение и какое-либо частное решение системы.

3.13. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

3.14. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases}$

3.15. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 7x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

3.16. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$

3.17. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -6, \\ -2x_1 + 7x_2 + 9x_3 - 11x_4 = -18, \\ -3x_1 + 5x_2 + 8x_3 - 11x_4 = -16. \end{cases}$

3.18. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1, \\ 6x_2 + 12x_3 - 6x_4 = -6, \\ -2x_1 - 6x_2 - 10x_3 = 2. \end{cases}$

3.19. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 5, \\ 10x_1 + 2x_2 + 11x_3 + 7x_4 = -20, \\ -15x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 11x_4 = -13. \end{cases}$

3.20. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 9, \\ 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 = -16, \\ -15x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 7x_4 = -17. \end{cases}$

3.21. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

3.22. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_5 = -3, \\ 2x_1 + 2x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 4, \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 7x_5 = 2. \end{cases}$

3.23. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6. \end{cases}$

3.24. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_5 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 3. \end{cases}$

4. ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО. РАЗМЕРНОСТЬ И БАЗИС. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ ВЕКТОРА

Исследовать линейную зависимость и независимость элементов (векторов) линейного пространства.

4.1. $a_1=(2, 7, -4)$, $a_2=(1, 1, -4)$, $a_3=(2, -2, -2)$.

4.2. $a_1=(1, 2, 3)$, $a_2=(2, -1, 0)$, $a_3=(3, 1, 3)$.

4.3. $a_1=(2, 5, 4)$, $a_2=(0, -1, 1)$, $a_3=(1, 5, 7)$.

4.4. $a_1=(5, 2, 4)$, $a_2=(0, 1, 4)$, $a_3=(5, 1, 0)$.

4.5. $a_1=(1, 2, 3)$, $a_2=(4, 5, 6)$, $a_3=(7, 8, 9)$.

4.6. $a_1=(1, -2, -3)$, $a_2=(-4, 5, 6)$, $a_3=(7, -8, 9)$.

4.7. $a_1=(2, -1, 1)$, $a_2=(0, -1, 2)$, $a_3=(2, 5, 7)$, $a_4=(1, -1, 1)$.

4.8. $a_1=(2, -7, 3)$, $a_2=(3, -1, 1)$, $a_3=(1, -13, 5)$, $a_4=(1, 6, -2)$.

4.9. $a_1=(1, -1, 1, 1)$, $a_2=(1, -1, 1, -1)$, $a_3=(-1, 1, 0, 1)$, $a_4=(1, 0, -1, 1)$.

4.10. $a_1=(1, 1, 1, 1)$, $a_2=(1, -1, -1, -1)$, $a_3=(0, 1, 0, 1)$, $a_4=(1, 0, -1, 0)$.

4.11. $f_1=1$, $f_2=2x+x^2$, $f_3=x-1$, $f_4=(x+2)^2$.

4.12. $f_1=x$, $f_2=-4x+x^2$, $f_3=x^2-8$, $f_4=2$.

4.13. $f_1=\cos x$, $f_2=\cos 2x$, $f_3=\cos 3x$, $f_4=\cos 4x$.

4.14. $f_1=\cos 2x$, $f_2=1-\cos 2x$, $f_3=\cos x$, $f_4=\cos^2 x$.

4.15. $f_1=\sin x$, $f_2=\sin 2x$, $f_3=\cos x$, $f_4=\cos 2x$.

4.16. $f_1=e^{2x}$, $f_2=e^{-x}$, $f_3=e^{2-x}$, $f_4=e^{x}$.

4.17. $f_1=e^{3-x}$, $f_2=e^{x}$, $f_3=e^{-x}$, $f_4=e^{3+x}$.

4.18. $f_1=e^{x}$, $f_2=e^{-x}$, $f_3=e^{2x}$, $f_4=e^{-2x}$.

4.19. $f_1=e^{x}$, $f_2=e^{2x}$, $f_3=e^{3x}$, $f_4=e^{4x}$.

4.20. $f_1=e^{x}+x$, $f_2=e^{2+x}$, $f_3=x$, $f_4=\sin x$.

4.21. $f_1=\sin x+1$, $f_2=x-3$, $f_3=\sin x$, $f_4=1+x+\sin x$.

Найти координаты вектора a в данном базисе.

4.22. $a=(6, -3)$, $g_1=(1, 3)$, $g_2=(-1, 4)$.

4.23. $a=(-2, 2)$, $g_1=(1, -4)$, $g_2=(-3, 5)$.

4.24. $a=(1, 0)$, $g_1=(-2, -4)$, $g_2=(1, 1)$.

4.25. $a=(0, 1)$, $g_1=(-4, 3)$, $g_2=(-5, 2)$.

4.26. $a=(7, -4, -4)$, $g_1=(2, -1, 0)$, $g_2=(3, 0, 2)$, $g_3=(1, -2, 1)$.

4.27. $a=(-2, -6, 6)$, $g_1=(-1, 1, -3)$, $g_2=(2, 0, 1)$, $g_3=(0, -4, 2)$.

Найти матрицу перехода от базиса $e_1=(1, 0)$, $e_2=(0, 1)$ к базису g_1, g_2 и вычислить координаты вектора a в базисе g_1, g_2.

4.28. $a=5e_1-2e_2$, $g_1=(2, -1)$, $g_2=(7, -3)$.

4.29. $a=-2e_1+e_2$, $g_1=(7, -8)$, $g_2=(7, -6)$.

4.30. $a=e_1+4e_2$, $g_1=(0, 3)$, $g_2=(1, -3)$.

4.31. $a=7e_1+12e_2$, $g_1=(2, 4)$, $g_2=(-8, -12)$.

Найти связь координат одного и того же вектора в базисах g_1, g_2, g_3 и f_1, f_2, f_3.

4.32. $g_1=(1, 2, 1)$, $g_2=(2, 3, 3)$, $g_3=(3, 7, 1)$, $f_1=(3, 1, 4)$, $f_2=(5, 2, 1)$, $f_3=(1, 1, -6)$.

4.33. $g_1=(1, 0, 1)$, $g_2=(1, 2, 3)$, $g_3=(3, -1, 1)$, $f_1=(-2, 1, 1)$, $f_2=(0, -1, 1)$, $f_3=(1, 0, -2)$.

Установить, является ли линейным пространством каждое из указанных множеств, и найти его подпространства для естественных операций сложения и умножения на число.

4.34. Множество натуральных чисел.

4.35. Множество целых чисел.

4.36. Множество четных чисел.

4.37. Множество рациональных чисел.

4.38. Множество векторов, лежащих на оси Ox.

4.39. Множество векторов, лежащих на оси Oy.

4.40. Множество векторов, лежащих на плоскости xOy.

4.41. Множество векторов, лежащих на плоскости xOz.

4.42. Множество троек чисел вида $(1\ \ a\ \ 0)$.

4.43. Множество троек чисел вида $(0\ \ a\ \ 0)$.

4.44. Множество троек чисел вида $(a\ \ a\ \ 0)$.

4.45. Множество многочленов степени не выше третьей.

4.46. Множество квадратных трехчленов.

4.47. Множество квадратных матриц.

5. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ. ОРТОНОРМИРОВАННЫЙ БАЗИС

Вычислить скалярное произведение векторов.

5.1. (11, 6, 13), (12, −14, 1). **5.2.** (7, −4, 10), (−1, 2, 2).

5.3. (1, 0, 4), (−3, 1, 1). **5.4.** (−4, −5, 0), (0, 4, −2).

5.5. (3, 2, 0, −1), (3, −4, 1, 2).

5.6. (1, 3, −4, −2), (2, −4, 1, 3).

5.7. (5, −1, 6, 2), (2, 3, −1, 1).

5.8. (2, −2, 7, 4), (6, 3, 1, −5).

Найти норму каждого из векторов.

5.9. а) (3, 0, −4); б) (0, −5, 12); в) (3, 5, −2); г) (−1, 3, 7).

5.10. а) (3, −4, 1, −1); б) (5, −1, −2, 10); в) (−1, 0, 12, 3); г) (0, −5, 2, 2).

Проверить, что следующие системы векторов попарно ортогональны, и дополнить их до ортогонального базиса. Нормировать полученный базис.

5.11. (2, −1, 1), (2, 3, −1).

5.12. (6, −2, 1), (1, 2, −2).

5.13. $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$.

5.14. $\left(\frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$.

5.15. (1, −2, 2, −3), (2, −3, 2, 4), (2, 2, 1, 0).

5.16. (2, 3, −5, −3), (0, 1, 3, −4), (−18, 8, 0, 2).

6. ЛИНЕЙНЫЙ ОПЕРАТОР. МАТРИЦА ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Установить, какие из указанных преобразований координат задают линейный оператор, и составить матрицу этого оператора.

6.1. $\varphi(x)=(x_2-3x_3,\ x_1)$.

6.2. $\varphi(x)=(6x_1+x_2,\ -5x_1,\ -7x_2)$.

6.3. $\varphi(x)=(3x_2-3,\ x_1)$.

6.4. $\varphi(x)=(4x_1+2,\ x_2)$.

6.5. $\varphi(x)=\left(x_2^3+9x_1,\ 2x_1-x_2\right)$.

6.6. $\varphi(x)=\left(x_1^2-4x_2,\ x_1+x_2\right)$.

6.7. $\varphi(x)=(x_1,\ 11x_1+2x_2)$.

6.8. $\varphi(x)=(-4x_1-x_2,\ 3x_1+10x_2)$.

6.9. $\varphi(x)=(6x_1+x_2-x_3,\ 5x_1,\ 7x_2)$.

6.10. $\varphi(x)=(x_1+2x_2-3x_3,\ -x_1+2x_2,\ x_2-x_3)$.

6.11. $\varphi(x)=(x_1+3x_3,\ -x_1+x_3,\ x_2-x_3)$.

6.12. $\varphi(x)=(x_3,\ 4x_1+x_2-5x_3,\ x_1-2x_3)$.

6.13. $\varphi(x)=(2-3x_3,\ -x_1+2x_3,\ x_2+7x_3)$.

6.14. $\varphi(x)=(5x_1+x_2-x_3,\ 2,\ x_2+x_3)$.

6.15. $\varphi(x)=\left(x_1+\sqrt{x_2}-x_3,\ -x_1+x_2,\ x_2+x_3\right)$.

6.16. $\varphi(x)=\left(x_3,\ -x_1+x_2,\ x_2-\sqrt{x_3}\right)$.

6.17. $\varphi(x)=\left(x_1^2+x_2+4x_3,\ x_1+x_2,\ -x_3\right)$.

6.18. $\varphi(x)=\left(x_2+x_3,\ x_2^2,\ x_2+7x_3\right)$.

Найти матрицу линейного оператора, определить его ранг и дефект.

6.19. $\varphi(x)=(x_1+x_2+x_3,\ x_1+x_2,\ x_2+x_3)$.

6.20. $\varphi(x)=(x_1+2x_2+3x_3,\ x_1+2x_2,\ 2x_2+3x_3)$.

6.21. $\varphi(x)=(x_1+2x_2-x_3,\ x_1+x_2+x_3,\ -x_1+x_3)$.

6.22. $\varphi(x)=(-x_1+5x_2-x_3,\ -2x_1+2x_2+2x_3,\ x_1+x_2-x_3)$.

Найти обратный оператор к оператору, заданному указанной матрицей.

6.23. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$.

6.24. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6.25. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$.

6.26. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$.

6.27. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -9 \end{pmatrix}$.

6.28. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

6.29. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

6.30. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 9 & 5 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Найти собственные векторы и собственные значения (собственные числа) операторов, заданных своими матрицами в некотором базисе.

7.1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7.2. $\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

7.3. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

7.4. $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

7.5. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$.

7.6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7.7. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

7.8. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$.

7.9. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

7.10. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7.11. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. **7.12.** $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -8 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

7.13. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. **7.14.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

7.15. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$. **7.16.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$.

Найти, не находя матрицы, собственные числа и собственные векторы операторов.

7.17. Оператора проектирования R^2 на ось Ox.

7.18. Оператора проектирования R^2 на ось Oy.

7.19. Оператора отражения R^2 относительно оси Ox.

7.20. Оператора отражения R^2 относительно оси Oy.

7.21. Оператора проектирования R^3 на плоскость xOy.

7.22. Оператора проектирования R^3 на ось Oy.

7.23. Оператора поворота R^3 на угол $90°$ вокруг оси Oz в положительном направлении.

7.24. Оператора поворота R^3 на угол $180°$ вокруг оси Oz.

7.25. Оператора отражения R^3 относительно плоскости xOy.

7.26. Оператора дифференцирования.

8. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ. ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Написать матрицу квадратичной формы и найти ее канонический вид (методом Лагранжа или методом ортогонального преобразования).

8.1. $x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$.

8.2. $x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2$.

8.3. $5x_1^2 - x_1x_2$.

8.4. $x_2^2+6x_1x_2$.

8.5. $x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$.

8.6. $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$.

8.7. $x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$.

8.8. $4x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-3x_2x_3$.

8.9. $3x_1^2+2x_2^2-x_3^2+2x_1x_2-4x_2x_3$.

8.10. $2x_1^2+3x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3-3x_2x_3$.

IV. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ (ЧАСТЬ 1)

1. ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Вычислить (приближенно) некоторое число членов последовательности. Нанести точки на график и определить, является ли последовательность убывающей или возрастающей, а также ограниченной или имеющей предел.

1.1. $a_n = \dfrac{-6n-1}{3n}$.

1.2. $a_n = \dfrac{10n+3}{5n}$.

1.3. $a_n = \dfrac{2n^2-1}{3n}$.

1.4. $a_n = \dfrac{-n^3-1}{n+10}$.

1.5. $a_n = \dfrac{-n^2-1}{5-n^2}$.

1.6. $a_n = \dfrac{2n^2-1}{3-n^2}$.

1.7. $a_n = \dfrac{2^n-1}{2^{n-2}}$.

1.8. $a_n = \dfrac{3^n-1}{3^{n-1}}$.

1.9. $a_n = \dfrac{n-1}{2^n}$.

1.10. $a_n = \dfrac{100n}{5^n}$.

1.11. $a_n = (-1)^n \dfrac{n-1}{n+6}$.

1.12. $a_n = (-1)^n \dfrac{2n}{n+10}$.

1.13. $a_n = (-1)^n \dfrac{4n}{n^2-1}$.

1.14. $a_n = (-1)^n \dfrac{2-n}{n^2}$.

1.15. $a_n = (-1)^n \dfrac{n^3+2}{n+12}$.

1.16. $a_n = (-1)^n \dfrac{n^2-1}{n-7}$.

1.17. $a_n = (-1)^n$.

1.18. $a_n = (-1)^{n+1} \cdot 2$

Вычислить предел последовательности.

1.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-2}{5-n}$.

1.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{2-n}$.

1.21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n-2}{3}$.

1.22. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-n}{100\,000}$.

1.23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+10}{5-n^2}$.

1.24. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{50n-3}{n^2}$.

1.25. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-3n-2}{4n^2+10n-3}$.

1.26. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+4n}{n^2+n-1}$.

1.27. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3-n^2-n-2}{2n^3+n^2-2}$.

1.28. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4-n^3+7n}{n^3+5n^2+3n+6}$.

1.29. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)^2-(2n+3)^2}{n-7}$.

1.30. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+6)^2-(n-5)^2}{2n+12}$.

1.31. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)^3-(n+3)^3}{n^2+8}$.

1.32. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^3-(n-3)^3}{2n^2+n-1}$.

1.33. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+(n+7)^3}{n^2-12n}$.

1.34. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^3+(n+4)^3}{n^2+1}$.

1.35. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)^3-(2n+3)^3}{4n^3-n^2+20}$.

1.36. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-1)^3-(2n+1)^3}{21n^3+5n^2+2}$.

1.37. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)!-(n+1)!}{(7n+6)n!}$.

1.38. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!+n!}{(n+2)!}$.

1.39. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$.

1.40. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)!+(n-2)!}{(n-1)!-(n-2)!}$.

1.41. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n+1}}{\sqrt[4]{n^3+2}}$.

1.42. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n+1}}{\sqrt[4]{n^2+2n}}$.

1.43. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{n^2+1}+\sqrt[3]{n^6+4}}{n\cdot\sqrt{n^2+2n}}$.

1.44. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[6]{n^2+3}+\sqrt[3]{n^9+4}}{n\cdot\sqrt{9n^4+2n}}$.

1.45. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-3^n}{3^n+2^n}$.

1.46. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^n+3^n}{4^n-3^n}$.

1.47. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+2}+2^n}{5^n+2^{n+3}}$.

1.48. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n-2}-2^n}{3^n+2^{n+10}}$.

2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. ПРОСТЕЙШИЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

Найти предел, разложив многочлены на множители непосредственно или приведя к общему знаменателю.

2.1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-4x+3}$.

2.2. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x+5}{x^2-x-20}$.

2.3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}$.

2.4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2+x-3}$.

2.5. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+3x^2+7x+5}{x^2-x-2}$.

2.6. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+5x^2+6x}$.

2.7. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.

2.8. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{27x^3-1}{3x^2+5x-2}$.

2.9. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

2.10. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{3}{x^3-8}\right)$.

2.11. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+2}{x^2-5x+4}+\dfrac{x-4}{3x^2-9x+6}\right)$.

2.12. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$.

2.13. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}-2\right)$.

2.14. $\lim\limits_{x\to -7}\left(\dfrac{2x^2+15x+7}{x+7}+13\right)$.

2.15. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\left(\dfrac{6x^2-x-1}{3x+1}+\dfrac{5}{3}\right)$.

2.16. $\lim\limits_{x\to -\frac{7}{2}}\left(\dfrac{2x^2+13x+21}{2x+7}+\dfrac{1}{2}\right)$.

Найти предел функции на бесконечности, вынося старшую степень x за скобки.

2.17. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+2}$.

2.18. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+x+1}{x^2-1}$.

2.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+2x-3}{x^3-x^2+10}$. **2.20.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+2x^3+4x}{x^3-4x^4+1}$.

2.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-7x+5}{x^3+7x^2+3}$. **2.22.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-23}{x^3+30x^2-10}$.

2.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5+2x^4+2x^3-x}{x^4+x^2+1}$. **2.24.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-7x^3+5x-3}{x^2+x-3}$.

2.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{4(2-x)^2}-\dfrac{x}{4}\right)$. **2.26.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-4}-x\right)$.

2.27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2}{2x+1}-\dfrac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2}\right)$.

2.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$.

2.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$.

2.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^3+1}{1-x}+\dfrac{20x^3+x-4}{4x}\right)$.

2.31. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^2+x}-x}$ **2.32.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^3+6}+\sqrt{x^3-1}}{\sqrt[4]{2+x}-x\sqrt{x}}$.

2.33. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^7+3}+\sqrt[3]{x^8-x}}{\sqrt[4]{x^3+5}-x^2}$. **2.34.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[6]{x^8+3}+\sqrt[4]{x^8+1}}{\sqrt[5]{x^7+5}+3x^2}$.

Найти предел, предварительно преобразовав выражение и применяя алгебраические формулы сокращенного умножения.

2.35. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$. **2.36.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$.

2.37. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$. **2.38.** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{6x+x^2+18}-3}{x+3}$.

2.39. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^3}$. **2.40.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$.

2.41. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{25+x^2}-5}{\sqrt{x^2+16}-4}$. **2.42.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+1}-1}$.

2.43. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}-1}$.

2.44. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x^2}$.

2.45. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{25+x}-\sqrt{4+x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+11}}$.

2.46. $\lim\limits_{x\to10}\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{\sqrt{x+6}-4}$.

2.47. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x^2}$.

2.48. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+8}-2}{4x^2}$.

2.49. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{2-x}}{2x}$.

2.50. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.

2.51. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2}{\sqrt{4+x^2}-2}$.

2.52. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{\sqrt{25+x}-5}$.

2.53. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{\sqrt{3+x}-2}$.

2.54. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{5x+5}{\sqrt{8+x^2}-3}$.

2.55. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{1-\cos x}$.

2.56. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{2-\cos x}}{2-2\cos x}$.

2.57. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{2\sin x}$.

2.58. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2-\sin x}-\sqrt{2+\sin x}}{\operatorname{tg} x}$.

Найти пределы с помощью эквивалентных бесконечно малых функций.

2.59. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2+x}{\sin 5x}$.

2.60. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{\operatorname{tg} 2x}$.

2.61. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{7x}-1}{21x-x^3}$.

2.62. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 5x}{1-\cos x}$.

2.63. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\arcsin 2x}{1-\cos 4x}$.

2.64. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg} 6x}{\sin 12x}$.

2.65. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{20\cdot\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg} 8x}$.

2.66. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{21\cdot\ln\left(1+\dfrac{x}{3}\right)}{7x-x^5}$.

2.67. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt[7]{1+x}-1}$.

2.68. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sqrt[6]{1+x}-1}$.

2.69. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{2x}-1}{\operatorname{tg}5x}$.

2.70. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{-5x}-1}{\sin 5x}$.

2.71. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt[5]{x}-1}$.

2.72. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{9x^2-9}{\sqrt[9]{x}-1}$.

2.73. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\operatorname{tg}4x}{\operatorname{tg}5x}$.

2.74. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 8x}$.

2.75. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$.

2.76. $\lim\limits_{x\to \frac{e}{2}}\dfrac{\ln 2x-1}{2x-e}$.

2.77. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{e^{-x}-e}{4x+4}$.

2.78. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{e^{\frac{x}{4}}-e}{x-4}$.

2.79. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sin\frac{4}{x}}{e^{1/x}-1}$.

2.80. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1-\cos\frac{1}{x}}{(4^{1/x}-1)^2}$.

2.81. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\lg\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}{1-\cos\frac{1}{x}}$.

2.82. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\lg\left(1+\frac{5}{x^4}\right)}{\operatorname{tg}^4\frac{1}{x}}$.

Используя переход к экспоненте, найти пределы.

2.83. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$.

2.84. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{1/x}$.

2.85. $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{1/2x}$.

2.86. $\lim\limits_{x\to 0}(1+10x)^{1/5x}$.

2.87. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{x}$.

2.88. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{1}{7x}\right)^{21x}$.

2.89. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{1}{10x}\right)^{5x}$.

2.90. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{6x}$.

2.91. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2+5x}\right)^{6x^2-x+3}$.

2.92. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{6x^2+1}\right)^{x^2+4x-1}$.

3. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ. ТЕХНИКА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Записать приращение функции $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$ (Δx — приращение аргумента) и упростить его.

3.1. $y = x+2$.

3.2. $y = 2x-3$.

3.3. $y = x^2+5$.

3.4. $y = 3x^2$.

3.5. $y = \exp(2x+4)$.

3.6. $y = \exp(-x+5)$.

3.7. $y = 2^{3x-7}$.

3.8. $y = 2^{-x+2}$.

3.9. $y = \exp(-x^2+8)$.

3.10. $y = \exp(1-4x^2)$.

3.11. $y = \cos\left(-x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

3.12. $y = \sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Найти отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ для функции в заданной точке.

3.13. $y = 2x-4$ при $x=1$ и $\Delta x = 1$.

3.14. $y = 2x-4$ при $x=2$ и $\Delta x = -3$.

3.15. $y = x^2+x-5$ при $x=-2$ и $\Delta x = -0{,}1$.

3.16. $y = x^2-2x$ при $x=0$ и $\Delta x = 0{,}3$.

3.17. $y = \dfrac{1}{x+2}$ при $x=0{,}4$ и $\Delta x = 1$.

3.18. $y = \dfrac{1}{x-1}$ при $x=-4$ и $\Delta x = 1$.

Найти производную, пользуясь правилами дифференцирования.

3.19. $y = 7x^2-3$.

3.20. $y = 5-8x^3$.

3.21. $y = 2\sqrt{x} - 3x + \dfrac{1}{x} + \sqrt[4]{3}$.

3.22. $y = 0{,}8\sqrt[5]{x} - \dfrac{x^2}{0{,}3} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{0{,}7}{x^3}$.

3.23. $y = (x+4)(2x-1)$.

3.24. $y = (-5x+3)(-x-8)$.

3.25. $y = x(-x+1)(5x-1)(3-x)$.

3.26. $y = x^2(x+1)(x-1)(1-9x)$.

3.27. $y = \left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{x}-2\right)$.

3.28. $y = \left(\sqrt[4]{x}+x\right)\left(\sqrt{x}-1\right)$.

3.29. $y = \dfrac{x+x^2+\sqrt{x}}{x^5}$.

3.30. $y = \dfrac{3x-x^2+\sqrt{x}}{x^4}$.

3.31. $y=\dfrac{2x+1}{2-7x}$.

3.32. $y=\dfrac{4-3x}{5x+1}$.

3.33. $y=\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x^5-\sqrt{x}}$.

3.34. $y=\dfrac{x^3-\sqrt{x}}{x^4+\sqrt{x}}$.

3.35. $y=\dfrac{\left(1+\sqrt{x}\right)\left(4-\sqrt{x}\right)}{\left(2-\sqrt{x}\right)^2}$.

3.36. $y=\dfrac{\left(7-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{\left(1-3\sqrt{x}\right)^2}$.

3.37. $y=xe^x$.

3.38. $y=(3-9x)e^x$.

3.39. $y=(3e^x+1)(2-e^x)$.

3.40. $y=(4-e^x)(5e^x-2)$.

3.41. $y=\dfrac{2e^x-5}{-8e^x+3}$.

3.42. $y=\dfrac{4e^x+9}{3e^x-2}$.

3.43. $y=2\cos x-4\sin x$.

3.44. $y=-3{,}4\cos x+0{,}7\sin x$.

3.45. $y=\dfrac{4\sin x}{2+\cos x}$.

3.46. $y=\dfrac{3-\cos x}{1+\sin x}$.

3.47. $y=2e^x\cos x+5x\sin x$.

3.48. $y=-5x\cos x+e^x\sin x$.

3.49. $y=\sqrt[6]{x}\cdot e^x\cdot \operatorname{tg} x$.

3.50. $y=x^2e^x\operatorname{ctg} x$.

3.51. $y=x^7 4^x\sin x$.

3.52. $y=\sqrt[4]{x}\cdot 7^x\cdot\cos x$.

3.53. $y=\dfrac{1+3\lg x}{x+\ln x}$.

3.54. $y=\dfrac{2-7\ln x}{x^3+\log_3 x}$.

3.55. $y=\dfrac{-9\cdot 3^x+x\cdot 5^x}{x\cdot 4^x}$.

3.56. $y=\dfrac{8\cdot 2^x-x\cdot 11^x}{x\cdot 6^x}$.

3.57. $y=5x+4\operatorname{arctg} x$.

3.58. $y=-4x+5\arcsin x$.

Представить в виде композиции функций $y=y_1\left(y_2\left(y_3(\ldots)\right)\right)$.

3.59. $y_1(x)=x+2,\ y_2(x)=\ln x,\ y_3(x)=\sqrt[6]{x}$.

3.60. $y_1(x)=3-x,\ y_2(x)=2^x,\ y_3(x)=\lg x$.

3.61. $y_1(x)=\sin x,\ y_2(x)=x^3,\ y_3(x)=x+6$.

3.62. $y_1(x)=\cos x,\ y_2(x)=\sqrt{x},\ y_3(x)=-4x$.

3.63. $y_1(x)=e^x,\ y_2(x)=\cos x,\ y_3(x)=\sin x$.

3.64. $y_1(x)=3^x,\ y_2(x)=\sin x,\ y_3(x)=\cos x$.

3.65. $y_1(x)=\operatorname{tg}x$, $y_2(x)=x^{-3}$, $y_3(x)=\sin x$, $y_4(x)=x^2$.

3.66. $y_1(x)=\ln x$, $y_2(x)=x^{-\frac{3}{2}}$, $y_3(x)=\cos x$, $y_4(x)=\sqrt{x}$.

Разложить композицию на элементарные функции.

3.67. $y=2x^7-7$.

3.68. $y=-3\sqrt{x}+1$.

3.69. $y=\ln(x^2+1)$.

3.70. $y=\lg\left(3\cdot\sqrt[4]{x}\right)$.

3.71. $y=\cos\left(5^{x^2+1}\right)$.

3.72. $y=\sin\left(3^{\frac{1}{x}+1}\right)$.

3.73. $y=\left(1+\sqrt{\sin x}\right)^3$.

3.74. $y=\arcsin\sqrt{\cos 4x}$.

3.75. $y=\exp\left(2-\cos\left(7\sqrt{x}\right)\right)$.

3.76. $y=\dfrac{1}{\cos e^{-2\sin x}}$.

3.77. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{-\sqrt{x}}}}$.

3.78. $y=\ln\left(1+\sqrt{1+\sqrt{1+e^x}}\right)$.

Найти производную сложной функции.

3.79. $y=\arcsin\dfrac{4}{x^2}$.

3.80. $y=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{-5}{x^3}\right)$.

3.81. $y=\cos^2(-7x)$.

3.82. $y=\dfrac{1}{16}\operatorname{tg}^4(4x)$.

3.83. $y=3\cos^2x-0{,}67\sin^5x+\cos(0{,}12)$.

3.84. $y=-\sin^2x-\sin^5x+\sin 1$.

3.85. $y=\sqrt{1+\cos x^2}$.

3.86. $y=\sqrt{2-\operatorname{tg}x^5}$.

3.87. $y=\cos^4(\sin 100x)$.

3.88. $y=\sin^3(\operatorname{ctg}3x)$.

3.89. $y=\ln(1+3^{4x})$.

3.90. $y=\ln(1-5^{2x})$.

Применяя логарифмирование, вычислить производную.

3.91. $y=x^{4x}$.

3.92. $y=x^{x^2}$.

3.93. $y=(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$.

3.94. $y=(\cos x)^{\sin x}$.

3.95. $y=(1+\ln x)^{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}$.

3.96. $y=(4-\ln^2x)^{\ln(1+x)}$.

3.97. $y=\dfrac{\left(2+\sqrt[7]{x}\right)(1+x^3)(1+2^x)}{\left(x+\sqrt{x}\right)(3^x+2^{-x})}$.

3.98. $y=\dfrac{\left(4-\sqrt[6]{x^5}\right)(1+x)(9-9^x)}{\left(x^2+\sqrt{x^5}\right)(2^x+2^{-x})}$.

3.99. $y=\dfrac{\sin e^x\cdot\operatorname{arctg}x\cdot\sqrt[12]{x^6-2}}{\sin^4(2x^8)}$.

3.100. $y=\dfrac{\cos e^{4x}\cdot\arcsin\cdot\sqrt[9]{x^9+x}}{\operatorname{tg}^3(-7x^5)}$.

3.101. $y=x^3e^{x^2}\sin(2x)\cdot\sqrt[4]{(2\operatorname{arctg}x)^3}$.

3.102. $y=(2-x)^{12}e^{-5x^3}\cos(2+x)\cdot\sqrt[7]{(\ln 6^x)^3}$.

Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ и вычислить ее значение при заданном значении параметра.

3.103. $\begin{cases}x=1-t^2,\\ y=t-t^3,\end{cases}$ $t_0=\dfrac{1}{2}$.

3.104. $\begin{cases}x=4+t^3,\\ y=1-t^2,\end{cases}$ $t_0=3$.

3.105. $\begin{cases}x=\dfrac{t+1}{t-5},\\ y=\dfrac{1+t^2}{t^3-1},\end{cases}$ $t_0=-4$.

3.106. $\begin{cases}x=\dfrac{t^3+1}{t^2-1},\\ y=\dfrac{1}{t^2-1},\end{cases}$ $t_0=-4$.

3.107. $\begin{cases}x=e^{4t}\sin t,\\ y=e^{4t}\cos t,\end{cases}$ $t_0=\dfrac{\pi}{3}$.

3.108. $\begin{cases}x=e^{-t}\sin 3t,\\ y=e^{-t}\cos 3t,\end{cases}$ $t_0=\dfrac{\pi}{18}$.

Найти дифференциал функции.

3.109. $y=\left(1+\sqrt{x}\right)^3$.

3.110. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$.

3.111. $y=e^{-x^2}\ln x$.

3.112. $y=e^{\sqrt{2+2^x}}$.

3.113. $y=\dfrac{\sin 3^x}{\cos e^x}$.

3.114. $y=\dfrac{1+\sqrt{e^x}}{\operatorname{arctg}e^x}$.

Используя дифференциал, вычислить приближенно.

3.115. $y=\sqrt{2x+1},\ \ x=7{,}68.$

3.116. $y=\sqrt{x^2-x+4},\ \ x=1{,}03.$

3.117. $y=x^5,\ x=2{,}993.$

3.118. $y=x^6,\ x=-1{,}88.$

3.119. $y=\sqrt[6]{x^2+1+\sin x},\ \ x=-0{,}05.$

3.120. $y=\sqrt[3]{x^3+\cos x},\ \ x=0{,}07.$

Найти вторую производную.

3.121. $y=x^4-4x^3+6x-9.$

3.122. $y=x^{-5}+2x+\sqrt{x}.$

3.123. $y=x(x^2-4)^8.$

3.124. $y=(x^2+4)^4(x-3).$

3.125. $y=5^x(2+x).$

3.126. $y=e^x(1-x).$

3.127. $y=e^x\cos 4x.$

3.128. $y=e^{2x}\sin 3x.$

3.129. $y=(1+x^2)\operatorname{arctg}x.$

3.130. $y=\sqrt{1-x^2}\arcsin x.$

3.131. $y=x^4\lg 3x.$

3.132. $y=x^5\ln 2x.$

Найти производную указанного n-го порядка.

3.133. $y=e^{-5x},\ n=4.$

3.134. $y=(1+x)^4x^3,\ n=7.$

3.135. $y=x\ln x,\ n=3.$

3.136. $y=\sin 4x,\ n=4.$

Доказать, что функция $y=f(x)$ удовлетворяет уравнению.

3.137. $y=e^x\sin x,\ y''-2y'+2y=0.$

3.138. $y=e^{-x}\cos x,\ y''+2y'+2y=0.$

3.139. $y=e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}},\ \ xy''+\dfrac{1}{2}y'-\dfrac{1}{4}y=0.$

3.140. $y=e^{4x}+2e^{-x},\ \ y'''-13y'-12y=0.$

3.141. $y=\sqrt{2x-x^2},\ \ y^3y''+1=0.$

3.142. $y=x+\sqrt{x^2+1},\ \ (1+x^2)y''+xy''-y=0.$

3.143. $y=\dfrac{x-3}{x+4},\ \ (2y')^2=(y-1)y''.$

3.144. $y=-\dfrac{5+x}{1+5x},\ \ \sqrt{\dfrac{y'}{6}}=\sqrt[3]{\dfrac{y''}{30}}.$

4. КАСАТЕЛЬНАЯ И НОРМАЛЬ К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ

Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в заданной точке.

4.1. $y=2{,}3x^2+0{,}2x-1$, $x_0=-0{,}34$.

4.2. $y=-7{,}2x^2+8{,}1x$, $x_0=1{,}29$.

4.3. $y=5x^3+x^2$, $x_0=-11$.

4.4. $y=-7x^3+2x^2$, $x_0=13$.

4.5. $y=\sqrt{-x^4+x}$, $x_0=0{,}07$.

4.6. $y=\sqrt{8x^3+6}$, $x_0=-0{,}7$.

Написать уравнения касательной и нормали к графику функции в заданной точке.

4.7. $y=\sqrt{x^4+3}$, $x_0=1$.

4.8. $y=\sqrt{x^5+4}$, $x_0=2$.

4.9. $y=x^2-5x+4$, $x_0=-1$.

4.10. $y=x^3+2x^2-4x-3$, $x_0=-2$.

4.11. $y=\mathrm{tg}\,2x$, $x_0=0$.

4.12. $y=\ln 2x$, $x_0=0$.

4.13. $y=5^{x-1}$, $x_0=3$.

4.14. $y=3^{1-x^2}$, $x_0=-1$.

4.15. $y=\dfrac{1+\sqrt{2x}}{1-\sqrt{2x}}$, $x_0=2$.

4.16. $y=\dfrac{2x+\sqrt[4]{x}}{2x-\sqrt[4]{x}}$, $x_0=1$.

4.17. $y=\dfrac{3x+\sqrt[4]{x}}{3x^2-\sqrt{x}}$, $x_0=1$.

4.18. $y=\dfrac{x^2+\sqrt[3]{x}}{x-\sqrt[3]{x}}$, $x_0=-8$.

4.19. $x^3+y^2+2x-6=0$, $y_0=3$.

4.20. $x^5+y^5-2xy=0$, $y_0=1$.

4.21. $\begin{cases} x=t+6t^2, \\ y=1-t, \end{cases}$ $t_0=-3$.

4.22. $\begin{cases} x=t^3-t^2, \\ y=2+4t, \end{cases}$ $t_0=-1$.

4.23. $\begin{cases} x=\cos 2t, \\ y=\mathrm{tg}(t+\pi), \end{cases}$ $t_0=\dfrac{\pi}{3}$.

4.24. $\begin{cases} x=\sin(t-3\pi), \\ y=\mathrm{tg}(2t-\pi), \end{cases}$ $t_0=\dfrac{\pi}{6}$.

5. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПЕРВОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

5.1. $y=\dfrac{3x+3}{x^2+2x+2}$, $[-3,\ -1]$. **5.2.** $y=\dfrac{4x^2}{3+x^2}$, $[-2,\ 2]$.

5.3. $y=5-\sqrt[3]{x^2+5x}$, $[-6,\ 0]$. **5.4.** $y=\sqrt[3]{x^2(x-4)^2}$, $[0,\ 7]$.

5.5. $y=1+12x^2-4x^3$, $[0,\ 3]$. **5.6.** $y=10-3x^2+2x^3$, $[-2,\ 3]$.

5.7. $y=\cos 4x+2x$, $[0,\ \pi]$. **5.8.** $y=\sin 2x-x$, $[-\pi,\ \pi]$

5.9. $y=\sqrt{16-x^2}$, $[-3,\ 4]$. **5.10.** $y=\sqrt{25-x^2}$, $[-4,\ 3]$.

Показать, что указанные функции не имеют точек экстремума.

5.11. $y=5-\sqrt[3]{3-x}$. **5.12.** $y=3+\sqrt[3]{2x+7}$.

5.13. $y=\dfrac{-3x+3}{2x-2}$. **5.14.** $y=\dfrac{x-2}{9x+5}$.

5.15. $y=\dfrac{2x^2-1}{x}$. **5.16.** $y=\dfrac{-3x^2+8}{4x}$.

5.17. $y=4+30x+2x^2+2x^3$. **5.18.** $y=20-x^3-2x^2-10x$.

Найти интервалы монотонности и экстремумы функций.

5.19. $y=2x^3-6x^2+7$. **5.20.** $y=-x^3+3x^2+9x-5$.

5.21. $y=x^2(4-x)^2$. **5.22.** $y=-x^2(x-9)^2$.

5.23. $y=(x-5)^2\cdot\sqrt[3]{(x+4)^2}$. **5.24.** $y=(1-x)^2\cdot\sqrt[3]{(3x+1)^2}$.

5.25. $y=\sqrt[5]{(3x-1)(x-7)^2}$. **5.26.** $y=\sqrt[5]{(x-9)(2-x)^2}$.

5.27. $y=x^2e^{-4x}$. **5.28.** $y=-3x^2e^{-2x}$.

5.29. $y=2x-\ln(1+4x^2)$. **5.30.** $y=-x+\ln(1-x)$.

5.31. $y=e^{6x}+4e^{-6x}$. **5.32.** $y=2e^{-3x}+e^{3x}$.

6. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Исследовать характер выпуклости и найти точки перегиба функции.

6.1. $y=3x^5-10x^3-15x^2+1$.

6.2. $y=3x^5-5x^4+3x+15$.

6.3. $y=x+36x^2-2x^3-x^4$.

6.4. $y=x^4+8x^3+18x^2-3$.

6.5. $y=\dfrac{x^3}{x^2+27}$.

6.6. $y=\dfrac{-x^3}{x^2+12}$.

6.7. $y=\sqrt[3]{x-2}$.

6.8. $y=\sqrt[5]{x+1}$.

6.9. $y=\sqrt[3]{(x-2)^2}$.

6.10. $y=\sqrt[5]{(x+1)^2}$.

6.11. $y=x\ln(2x)$.

6.12. $y=x^2e^{\frac{1}{x}}$.

6.13. $y=xe^{-4x}$.

6.14. $y=-xe^{-3x}$.

7. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

Найти пределы, пользуясь правилом Лопиталя.

7.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x-3}{6x^3-x^2+1}$.

7.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x}{x^4+x^2+9}$.

7.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{e^{x^2}}$.

7.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$.

7.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x^4}+3}{e^{x^2}+x}$.

7.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x^2}+1}{e^{x^2}+x^3}$.

7.7. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^4\cdot e^{-x}$.

7.8. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot e^{-10x}$.

7.9. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+3)\cdot e^{8x}$.

7.10. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^5-4)\cdot e^{2x}$.

7.11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^3+3)}{\ln x}$.

7.12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^4+1)}{\ln(x+6)}$.

7.13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+3)}{\ln(x^3+2)}$.

7.14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^2+3)}{\ln(x^4+x)}$.

7.15. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x+\pi)}{\sin(x^3+2\pi)}$.

7.16. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(x+0{,}5\pi)}{\cos(x^2+2{,}5\pi)}$.

7.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin(x+\pi)}$.

7.18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}$.

7.19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin 3x}$.

7.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin x}{\ln\sin 5x}$.

7.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-5^x}{7^x-3^x}$.

7.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-3^x}{6^x-12^x}$.

7.23. $\lim\limits_{x\to 0}x^3\cdot e^{1/x^3}$.

7.24. $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot e^{1/x^2}$.

8. АСИМПТОТЫ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Найти вертикальные асимптоты графика функции.

8.1. $y=\dfrac{x-2}{2x-6}$.

8.2. $y=\dfrac{x+6}{5x-1}$.

8.3. $y=\dfrac{x+3}{x^2-1}$.

8.4. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-2}$.

8.5. $y=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$.

8.6. $y=\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-9}$.

8.7. $y=e^{3/x}$.

8.8. $y=e^{-1/x}$.

8.9. $y=xe^{-1/x}$.

8.10. $y=x^2e^{1/x}$.

8.11. $y=(x+4)e^{1/(x+4)^2}$.

8.12. $y=(x-3)e^{-1/(x-3)^2}$.

8.13. $y=\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^x$.

8.14. $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

8.15. $y=\dfrac{e^{x-1}}{x-1}$.

8.16. $y=\dfrac{e^{x+5}}{x+5}$.

8.17. $y=\dfrac{1}{e^x-4}$.

8.18. $y=\dfrac{1}{e^x-3}$.

Найти наклонные или горизонтальные асимптоты графиков функций.

8.19. $y=\dfrac{1}{x-4}$.

8.20. $y=\dfrac{5}{x+9}$.

8.21. $y=\dfrac{x^2}{3x-4}$.

8.22. $y=\dfrac{2x^2}{x+12}$.

8.23. $y=\dfrac{x^2}{5x^2+x-4}$.

8.24. $y=\dfrac{x-x^2}{x^2+x+8}$.

8.25. $y=\dfrac{x-6x^3}{x^2+4}$.

8.26. $y=\dfrac{x+x^2+x^3}{5x^2-x-7}$.

8.27. $y=xe^{-3x^2}$.

8.28. $y=x^2e^{-x^2}$.

8.29. $y=\dfrac{x}{e^{3x}}$.

8.30. $y=\dfrac{x}{e^{-4x}}$.

8.31. $y=\dfrac{e^{-2x}}{x^3}$.

8.32. $y=\dfrac{e^{2x}}{x^2+x}$.

8.33. $y=\dfrac{\ln x}{2x}$.

8.34. $y=\dfrac{\ln x}{-6x}$.

8.35. $y=\dfrac{\ln(x^2+4)}{x^3}$.

8.36. $y=\dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2}$.

9. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

Найти интервалы знакопостоянства и корни функций.

9.1. $y=-x^2-3x-2$.

9.2. $y=x^2-7x+12$.

9.3. $y=x^3+5x^2+6x$.

9.4. $y=-x^3+x^2+20x$.

9.5. $y=\dfrac{x+7}{x^2-4}$.

9.6. $y=\dfrac{x^3-9x}{x-4}$.

9.7. $y=\dfrac{3^x-81}{3^{2x}-81}$.

9.8. $y=\dfrac{16-2^x}{2^{2x}-16}$.

9.9. $y=-x\cdot 2^{x+5}$.

9.10. $y=x\cdot 4^{3-x}$.

9.11. $y=-x^2\ln(x^2-2x+2)$.

9.12. $y=2x^4\ln(x^2+4x+5)$.

9.13. $y=|x+2|-6$.

9.14. $y=|x-9|-1$.

9.15. $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+2x\right)$.

9.16. $y=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)$.

9.17. $y=-\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{3}+3x\right)$.

9.18. $y=\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{8}\right)$.

Установить, четной или нечетной является данная функция.

9.19. $y=x^4-|x|+5$.
9.20. $y=x^6-6|2x|$.
9.21. $y=x^3-x$.
9.22. $y=x^5-\sqrt[3]{x}$.
9.23. $y=\sin x^2+\operatorname{tg}5x\operatorname{ctg}x^3$.
9.24. $y=\cos x+\sin 3x\operatorname{tg}x^5$.
9.25. $y=\sin 2x+2\sin x$.
9.26. $y=\operatorname{tg}7x-7\operatorname{tg}x$.
9.27. $y=1-\ln(2+x^2)$.
9.28. $y=\lg(1-x^4+5x^6)$.
9.29. $y=x+\dfrac{1}{x}$.
9.30. $y=x^3-\dfrac{x}{1+x^2}$.

Построить график функции, используя первую производную.

9.31. $y=2-4x^3+3x^2$.
9.32. $y=15x+6x^2-x^3$.
9.33. $y=(2x-9)^2(x+5)^2$.
9.34. $y=(x-7)^2(3x+1)^2$.
9.35. $y=(x-3)^3(3x+1)^3$.
9.36. $y=(4x-7)^3(x+7)^3$.
9.37. $y=2x^6-15x^4-36x^2+20$.
9.38. $y=11-2x^6+3x^4+12x^2$.

Провести полное исследование функции и построить ее график.

9.39. $y=\dfrac{1-x^2}{x-2}$.
9.40. $y=\dfrac{4-x^2}{x+3}$.
9.41. $y=\dfrac{x^4}{x^3-8}$.
9.42. $y=\dfrac{x^3-3x}{x^2-1}$.
9.43. $y=\dfrac{x}{x^3+2}$.
9.44. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.
9.45. $y=e^{2x-x^2}$.
9.46. $y=xe^{(-x^2)/2}$.
9.47. $y=xe^{1/x}$.
9.48. $y=xe^{-1/x^2}$.
9.49. $y=(x-2)e^{-1/x}$.
9.50. $y=x^2e^{2/x}$.
9.51. $y=\dfrac{\ln x}{x}$.
9.52. $y=x^2\ln x$.
9.53. $y=x^2\ln^2 x$.
9.54. $y=\dfrac{\ln x}{x^2}$.

10. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ И НА ОТРЕЗКЕ

Найти значения параметров, при которых функция будет непрерывной.

10.1. $f(x)=\begin{cases}3x-A, & \text{при } x\le -7,\\ 1-12x, & \text{при } x>-7.\end{cases}$

10.2. $f(x)=\begin{cases}A-4x, & \text{при } x\le 6,\\ x+12, & \text{при } x>6.\end{cases}$

10.3. $f(x)=\begin{cases}x^2-Ax, & \text{при } x\le -1,\\ x^3+5, & \text{при } x>-1.\end{cases}$

10.4. $f(x)=\begin{cases}Ax^2+6x, & \text{при } x\le 3,\\ x^3-26, & \text{при } x>3.\end{cases}$

10.5. $f(x)=\begin{cases}x^3+Ax^2, & \text{при } x\le 2,\\ x^2+Bx, & \text{при } 2<x\le 4,\\ -3x+11, & \text{при } x>4.\end{cases}$

10.6. $f(x)=\begin{cases}x^3+2x^2, & \text{при } x\le -1,\\ Ax^2-5x, & \text{при } -1<x\le 0,\\ 2x-B, & \text{при } x>0.\end{cases}$

Найти все точки разрыва функции и определить их тип. Построить график в окрестности каждой точки разрыва.

10.7. $y=\dfrac{4-x}{x+3}$.

10.8. $y=\dfrac{x}{x-8}$.

10.9. $y=\dfrac{x+1}{(x+7)^2}$.

10.10. $y=\dfrac{x-3}{(x-10)^2}$.

10.11. $y=\dfrac{x^2-4}{x^3-8}$.

10.12. $y=\dfrac{x^3-27}{x^2-9}$.

10.13. $y=\dfrac{\sin x}{x}$.

10.14. $y=\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$.

10.15. $y=\dfrac{|x-5|}{x-5}$.

10.16. $y=\dfrac{|x+3|}{x+3}$.

10.17. $y=\dfrac{|x+2|}{(x+2)^4}$. **10.18.** $y=\dfrac{|x-7|}{(x-7)^2}$.

10.19. $y=x^4e^{1/x}$. **10.20.** $y=x^3e^{(-2)/x}$.

10.21. $y=x\cdot 4^{(-1)/x}$. **10.22.** $y=x^4 3^{1/x}$.

10.23. $y=\dfrac{x-3}{2^x-8}$. **10.24.** $y=\dfrac{x+2}{3^x-\frac{1}{9}}$.

11. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА, ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ

Написать формулу Тейлора n-го порядка в указанной точке x_0.

11.1. $y=\dfrac{1}{2-x}$, $x_0=-3$, $n=3$.

11.2. $y=\dfrac{1}{x+5}$, $x_0=-1$, $n=3$.

11.3. $y=\sqrt[4]{2x+12}$, $x_0=-5$, $n=2$.

11.4. $y=\sqrt[5]{2x-14}$, $x_0=6$, $n=2$.

11.5. $y=(x+4)e^{1-x}$, $x_0=1$, $n=4$.

11.6. $y=(2x-1)e^{2-x}$, $x_0=-1$, $n=4$.

11.7. $y=(3x-4)^2\ln x$, $x_0=3$, $n=2$.

11.8. $y=(2-7x)^2\ln(-x)$, $x_0=-4$, $n=2$.

11.9. $y=(x^2+5x-1)^2\ln(3+x^4)$, $x_0=1$, $n=2$.

11.10. $y=(3x^2-2x+1)^2\ln(9+x^6)$, $x_0=-1$, $n=2$.

11.11. $y=\sin\left(\dfrac{x}{4}\right)e^{-4x}$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$, $n=3$.

11.12. $y=\cos\left(\dfrac{x}{3}\right)e^{3x}$, $x_0=\dfrac{\pi}{3}$, $n=3$.

Вычислить приближенно, используя несколько первых членов разложения по формуле Тейлора.

11.13. $y(1{,}98)$, где $y=x^{12}-x^4-3x^2+2$.

11.14. $y(2{,}03)$, где $y=10x^{16}+5x^5+3x+2$.

11.15. $y(1{,}005)$, где $y=x^{100}-x^{40}+x^{20}$.

11.16. $y(0{,}97)$, где $y=x^{200}+x^{50}+x^{10}$.

11.17. $y(0{,}02)$, где $y = e^{x^3 - 3x}$.

11.18. $y(-0{,}11)$, где $y = e^{x^5 + 5x}$.

11.19. $y(0{,}032)$, где $y = \ln\left(1 + \sqrt{x}\right)$.

11.20. $y(0{,}04)$, где $y = \ln\left(x + \sqrt{1 - x}\right)$.

Исследовать поведение функции в окрестности заданной точки, написав несколько членов разложения функции по формуле Тейлора.

11.21. $y = 4\cos(x+2) + 2x^2 + 8x$, $x_0 = -2$.

11.22. $y = 2\cos(x+3) + x^2 + x + 2$, $x_0 = -3$.

11.23. $y = x^2 + 1 - 2x\ln(x+1)$, $x_0 = 0$.

11.24. $y = 2x^2 - 8x + 5 + 4\ln x$, $x_0 = 1$.

11.25. $y = 2e^{x-2} - x^2 + 2x + 1$, $x_0 = 2$.

11.26. $y = x^2 - 2e^{-1-x}$, $x_0 = -1$.

12. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Найти значения функций нескольких переменных в указанных точках.

12.1. $z = x^2 y - \dfrac{y}{x^3}$, $M\,(1,\ 3)$.

12.2. $z = e^{x+y}\sin(x)$, $M\left(\dfrac{\pi}{2},\ -\dfrac{\pi}{2}\right)$.

12.3. $u = 2x - 3y + z^2$, $M\,(1,\ 2,\ -1)$.

12.4. $u = x^2 - 3y_3 + 2xz$, $M\,(0,\ 1,\ 3)$.

12.5. $z = (x+y)\ln(x^2+y)$, $M\,(1,\ 2)$.

12.6. $z = x^{y^2-1} + y^{x+2}$, $M_1\,(2,\ 2)$, $M_2\,(1,\ 3)$.

12.7. $z = x + y\sin(x+1)$, $M\,(0,\ 2)$.

12.8. $z = y + \cos(2-x)$, $M\,(0,\ 3)$.

12.9. $u = 5x + 3y + 2z + 4\sin(2t)$, $M\,(1,\ 2,\ 2,\ 0)$.

12.10. $u = \cos(2t) + x^3 + 5y - 4$, $M\,(0,\ 1,\ 6,\ 3)$.

Найти и изобразить область определения функции.

12.11. $z=\sqrt{x-y-1}$.

12.12. $z=\sqrt{2x-y+2}$.

12.13. $z=\sqrt{y+x^2+1}$.

12.14. $z=\sqrt{y-2x^2-3}$.

12.15. $z=\ln(2x-y+1)$.

12.16. $z=\ln(x+2y-1)$.

12.17. $z=\ln(xy)$.

12.18. $z=\ln(y^2-4x+8)$.

12.19. $z=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

12.20. $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$.

12.21. $z=\dfrac{1}{2x-y+1}$.

12.22. $z=\dfrac{1}{x+2y-1}$.

12.23. $z=\dfrac{1}{\ln(x^2+y+1)}$.

12.24. $z=\dfrac{1}{\ln(y^2-x-1)}$.

13. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ, ГРАДИЕНТ

Найти частные производные 1-го и 2-го порядков и полные дифференциалы для данных функций.

13.1. $z=x^3y+3y^2x$.

13.2. $z=2xy^2-3y^3x^2+y$.

13.3. $z=3xy+\dfrac{y}{x}$.

13.4. $z=5x^2y-\dfrac{y^2}{x^2}$.

13.5. $z=x\cos(xy)$.

13.6. $z=y\sin(x^2y^3)$.

13.7. $z=y^2e^{x-2y}$.

13.8. $z=xe^{x+y}$.

13.9. $z=\ln x^2y^3$.

13.10. $z=\ln\sqrt{xy}$.

13.11. $z=\ln(5x+7y)$.

13.12. $z=\ln(3x+2y)$.

13.13. $z=xy\arcsin x$.

13.14. $z=y\,\mathrm{arctg}(xy)$.

13.15. $u=x^2-3y^2+2yz$.

13.16. $u=2y^3-3xy+5xz^3$.

13.17. $u=\dfrac{x}{y}+\dfrac{z}{x}$.

13.18. $u=\dfrac{z}{y^2}-\dfrac{x^2}{z}$.

13.19. $u=\sin(xyz)$.

13.20. $u=\cos(xyz^2)$.

Найти для данных функций производную по направлению $\vec{n}$ в заданной точке.

13.21. $u=3x^2-2xy+zy$; $\vec{n}=\{4,\ 3,\ 0\}$, $M(1,\ 2,\ 0)$.

13.22. $u=2xz-yz+3yx^2$; $\vec{n}=\{0, -4, 3\}$, $M(2, 1, 2)$.

13.23. $u=5x-3xy+7xyz$; $\vec{n}=\{1, 2, -2\}$, $M(3, 0, 1)$.

13.24. $u=7x^2y-3xz^2+5yz^2$; $\vec{n}=\{-1, 2, 2\}$, $M(2, 0, 0)$.

Изобразить линии уровня и найти вектор градиента для указанных функций.

13.25. $f(x, y)=x-2y$.

13.26. $f(x, y)=3x+y+5$.

13.27. $f(x, y)=2-x-4y$.

13.28. $f(x, y)=3x+4y$.

13.29. $f(x, y)=7-7x+y$.

13.30. $f(x, y)=-5x-10y$.

13.31. $f(x, y)=x-y^2$.

13.32. $f(x, y)=y+x^2$.

13.33. $f(x, y)=x^2+y-2$.

13.34. $f(x, y)=y^2-x+3$.

Записать в явном виде функцию $y=f(x)$, заданную неявно уравнением.

13.35. $x^4+y^4=1$.

13.36. $x^2+y^6=1$.

13.37. $x^7+y^{-2}=1$.

13.38. $3x+y^{-5}=1$.

13.39. $xy=-4$.

13.40. $\dfrac{3}{xy}=17$.

13.41. $2^{xy}=5$.

13.42. $9^{-xy}=2$.

13.43. $\ln(xy)-\ln x=\ln 3$.

13.44. $\ln(x^3+y)+\ln 4x=\ln 2$.

13.45. $(x+1)\cdot\sin(x+2y)=\cos x$.

13.46. $(x^2+1)\cdot\operatorname{tg}(2xy)=\cos x+\sin x$.

Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ от функций, заданных неявно уравнением $F(x, y)=0$.

13.47. $y-x^2+2=0$.

13.48. $3y+2x^2-x=0$.

13.49. $x^2+y^2=9$.

13.50. $x^2-y^2=4$.

13.51. $x^2y-y^2x-1=0$.

13.52. $x^2y^2-x^4-y^4=1$.

13.53. $x^2-8y^2=4$.

13.54. $7x^3+y^2=-1$.

13.55. $y^3x^2-y^2+0{,}4x^5=0$.

13.56. $xy+x^{25}+0{,}6y^2+x-0{,}2y=0$.

13.57. $\sin(xy)+\cos 3-\sqrt{(x+2)(5-y)}=0$.

13.58. $\cos(xy)+\operatorname{tg} 9+\sqrt{(x-2)^6(1+y)}=0$.

13.59. $e^x x^2+2^{xy}=1$.

13.60. $e^{-5x}x^5+7xy=3$.

Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ от функций, заданных неявно уравнением $F(x, y, z)=0$.

13.61. $z-x^2-y^2=0$.

13.62. $z+x^2-x+y=0$.

13.63. $x^2+y^2+z^2=1$.

13.64. $x^2-y^2-z^2=4$.

13.65. $z^3-xyz=1$.

13.66. $e^z-xyz=0$.

Сделав замену переменных, преобразовать уравнение.

13.67. $u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}=0$, $\xi=x+y$, $\eta=y$.

13.68. $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}=0$, $\xi=x$, $\eta=y-x$.

13.69. $u_{xx}-u_{xy}-6u_{yy}=0$, $\xi=y-x$, $\eta=y-3x$.

13.70. $u_{xx}+u_{xy}-2u_{yy}=0$, $\xi=y+x$, $\eta=y-2x$.

Узнать, является ли функция $z=f(x, y)$ решением уравнения.

13.71. $z=x^2+8t$, $u_t=4u_{xx}$.

13.72. $z=x^2+6t$, $u_t=3u_{xx}$.

13.73. $z=\sin(x-t)$, $u_{tt}=u_{xx}$.

13.74. $z=\cos(x+t)$, $u_{tt}=u_{xx}$.

13.75. $z=x+2t-(x-3t)^3$, $u_{tt}=4u_{xx}$.

13.76. $z=x-3t+2(x+3t)^3$, $u_{tt}=9u_{xx}$.

14. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

Для данных поверхностей найти уравнения касательных плоскостей и нормалей в указанных точках.

14.1. $z=2x^2-4y^2$, $M_1(2, 1, 4)$, $M_2(0, 1, -4)$.

14.2. $z=xy$, $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(-1, 2, -2)$.

14.3. $z=x^2+y^2$, $M_1(0, 0, 0)$, $M_2(1, 2, 5)$.

14.4. $z=2x^2+y^2-3$, $M_1(0, 0, -3)$, $M_2(1, 1, 0)$.

14.5. $x^2+y^2+z^2=4$, $M_1(0, 0, 2)$, $M_2(0, 2, 0)$, $M_3(2, 0, 0)$.

14.6. $x^2+y^2-z^2=4$, $M_1(3, 4, 5)$, $M_2(-4, 0, -4)$, $M_3(0, -1, 1)$.

14.7. $x^2-2x+y+z^2=0$, $M_1(1, 1, 0)$, $M_2(1, -3, -2)$.

14.8. $x^3+xy-z^2=0$, $M_1(1, 3, 2)$, $M_2(0, 3, 0)$.

15. ИССЛЕДОВАНИЕ НА ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Найти стационарные точки функций.

15.1. $z=3x^2+y^2-2y$.

15.2. $z=x^2-6x+y^2$.

15.3. $z=x^2-2y^2+2x$.

15.4. $z=x^2-y^2-4y$.

15.5. $u=2x^2+y^2+2z^2-xy$.

15.6. $u=2x^2-y^2-z^2+xz$.

15.7. $z=x^2-2xy+2y^2-2x-4y$.

15.8. $z=x^2+2xy-2y^2-2x-8y$.

15.9. $z=x^2y-x^2-2xy+2x$.

15.10. $z=y^2x-4xy+y^2-4y$.

Исследовать на экстремум функции двух переменных.

15.11. $z=x^2-2x+y^2+4y+5$.

15.12. $z=x^2+2x-y^2+4y-3$.

15.13. $z=x^2+xy+y^2-3x-6y$.

15.14. $z=xy-x^2-y^2+3x$.

15.15. $z=3x^2-x^3+y^2+4y$.

15.16. $z=3x^2+12x+3y^2-y^3$.

Найти условный экстремум функции двух переменных.

15.17. $z=x^2+y^2$, $y-x+1=0$.

15.18. $z=x^2-y^2$, $y-x+1=0$.

15.19. $z=xy$, $y-x=0$.

15.20. $z=xy$, $y+x=0$.

15.21. $z=x^2-4x+y^2+4$, $y=x$.

15.22. $z=x^2-4x+y^2+4$, $y=x+2$.

15.23. $z = xy^2$, $x + 2y - 1 = 0$.

15.24. $z = x^3 - y^3$, $x - y - 2 = 0$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ на замкнутом множестве Ω.

15.25. $z = 3x + y + 5$, Ω — квадрат $ABCD$, $A(0, 0)$, $C(-5, 5)$.

15.26. $z = x - 6y + 1$, Ω — квадрат $ABCD$, $A(0, 0)$, $C(4, 4)$.

15.27. $z = x^2 - y + 2$, Ω — квадрат $ABCD$, $A(0, 0)$, $C(-1, 1)$.

15.28. $z = x + 2y^2 - 7$, Ω — квадрат $ABCD$, $A(0, 0)$, $C(3, -3)$.

15.29. $z = 2x - 8y - 3$, Ω — прямоугольник $ABCD$, $A(0, 0)$, $C(-6, 2)$.

15.30. $z = -5x - y + 1$, Ω — прямоугольник $ABCD$, $A(0, 0)$, $C(4, -3)$.

15.31. $z = x^2 - xy + y$, Ω — прямоугольник $ABCD$, $A(0, 0)$, $C(6, 5)$.

15.32. $z = 4xy - y^2 + 8x - 3$, Ω — прямоугольник $ABCD$, $A(0, 0)$, $C(-3, -4)$.

15.33. $z = -3xy + 3$, Ω — треугольник ABC, $A(-1, -1)$, $B(6, -1)$, $C(-1, 4)$.

15.34. $z = 4xy + 1$, Ω — треугольник ABC, $A(3, 3)$, $B(3, -2)$, $C(-8, 3)$.

16. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Решить графически системы неравенств и заменить их системами неравенств вида

$$\begin{cases} a \le x \le b, \\ \varphi(x) \le y \le \psi(x) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} c \le y \le d, \\ \alpha(y) \le x \le \beta(y). \end{cases}$$

16.1. $\begin{cases} x \ge 2, \\ y \le -1. \end{cases}$

16.2. $\begin{cases} x \le 3, \\ y \ge 1. \end{cases}$

16.3. $\begin{cases} x \ge -3, \\ y \ge 5. \end{cases}$

16.4. $\begin{cases} x \le 2, \\ y \le -4. \end{cases}$

16.5. $\begin{cases} x+y\le 3, \\ x-2y\ge 1. \end{cases}$

16.6. $\begin{cases} x-y\ge 0, \\ 2x+y\ge 4. \end{cases}$

16.7. $\begin{cases} x-y\le 0, \\ 5x-y\ge 5. \end{cases}$

16.8. $\begin{cases} x+y\le 2, \\ 4y+x\ge -1. \end{cases}$

16.9. $\begin{cases} 2x-7y\le 2, \\ y\le 5. \end{cases}$

16.10. $\begin{cases} 3x-5y\ge 4, \\ y\le 2. \end{cases}$

16.11. $\begin{cases} 4x+5y\ge 0, \\ x+6\le 0. \end{cases}$

16.12. $\begin{cases} 2x+7y\le 0, \\ y+4\le 0. \end{cases}$

16.13. $\begin{cases} 2x+y\le 2, \\ 2x+y+3\ge 0, \\ -4\le x\le 2. \end{cases}$

16.14. $\begin{cases} x+2y+6\ge 0, \\ x+2y\le 4, \\ -2\le x\le 4. \end{cases}$

16.15. $\begin{cases} 2x-3y+6\ge 0, \\ 2x\le 6+3y, \\ 0\le y\le 4. \end{cases}$

16.16. $\begin{cases} 4x-5y+5\ge 0, \\ 4x\le 5y, \\ 1\le y\le 3. \end{cases}$

16.17. $\begin{cases} x-2y-2\le 0, \\ 2x+3y\ge 6, \\ x-2y+2\ge 0. \end{cases}$

16.18. $\begin{cases} 2x+y-4\le 0, \\ x-y\ge 0, \\ 2x+y+6\ge 0. \end{cases}$

16.19. $\begin{cases} 3x+4y+12\ge 0, \\ 3x+4y-24\le 0, \\ x+2y\le 0. \end{cases}$

16.20. $\begin{cases} 4x-y+8\ge 0, \\ 4x-y-12\le 0, \\ x+5y\le 10. \end{cases}$

16.21. $\begin{cases} x\ge y, \\ 3x+y\le 0, \\ y+4\ge 0, \\ 2y\ge x-8. \end{cases}$

16.22. $\begin{cases} 2x\le y, \\ 4x+y\ge 0, \\ y\le 3, \\ y\le 3+2x. \end{cases}$

16.23. $\begin{cases} x+8y\ge 0, \\ x+4y+8\ge 0, \\ x-3y\le 3, \\ y+4\ge x, \\ y-x+4\ge 0, \\ y+6\ge 2x. \end{cases}$

16.24. $\begin{cases} x+3\ge 0, \\ x\le 7, \\ y\ge 0, \\ y\le 5, \\ x+y\le 8, \\ x+y+1\ge 0. \end{cases}$

17. ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Методом градиента исследовать на экстремум указанную функцию $f(x, y)$ при указанных ограничениях.

17.1. $f(x, y)=2x+y;\ \begin{cases} x\le 1, \\ y\le 1, \\ 2x+2y\le 3. \end{cases}$

17.2. $f(x, y)=-3x-4;\ \begin{cases} 3x+y-3\le 0, \\ y\le x+3, \\ x\le 2. \end{cases}$

17.3. $f(x, y)=x+y+1;\ \begin{cases} 6x+y\ge 2, \\ 1+x+y\ge 0. \end{cases}$

17.4. $f(x,y)=x+3y-0{,}5;\ \begin{cases} 2x+2y\le 7, \\ y\le 4. \end{cases}$

17.5. $f(x, y)=4x+3y+8;\ \begin{cases} x+2y\le 6, \\ x+y\le 3, \\ x\ge -2, \\ y\ge 0. \end{cases}$

17.6. $f(x, y)=x+5y-7;\ \begin{cases} 2x+y\le 4, \\ x+y-1\le 0, \\ y+4\ge 0, \\ x\ge 0. \end{cases}$

17.7. $f(x, y)=x-y;\ \begin{cases} x+y\ge 2, \\ 1-x+y\ge 0, \\ y\le 4. \end{cases}$

17.8. $f(x, y)=x+y;\ \begin{cases} x+2y\le 4, \\ x+y+3\ge 0, \\ x\le 8. \end{cases}$

17.9. $f(x, y)=4x-2y+3;\ \begin{cases} 2x+y\le 8; \\ 4x+2y\ge -5. \end{cases}$

17.10. $f(x,\, y) = 3x + 6y + 1;\ \begin{cases} x - 2y \le 12, \\ 6y \le 3x + 5. \end{cases}$

17.11. $f(x,\, y) = 5x + 7y;\ \begin{cases} 3x + 2y \le 19, \\ x + 2y \le 13, \\ 0 \le x \le 5, \\ 0 \le y \le 6. \end{cases}$

17.12. $f(x,\, y) = 10x + 20y;\ \begin{cases} x + 3{,}5y \le 350, \\ 2x + 0{,}5y \le 180, \\ x + y \ge 10, \\ 0 \le x, \\ 0 \le y. \end{cases}$

17.13. $f(x,\, y) = 8 - 5x - 2y;\ \begin{cases} 3x - y \le 6, \\ x - y \le 1, \\ x + y \ge -1, \\ -4 \le x \le 8, \\ 0 \le y. \end{cases}$

17.14. $f(x,\, y) = x;\ \begin{cases} x + y - 1 \ge 0, \\ y - 2x \le 2, \\ x + y \le 9, \\ 2x - y \le 6, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$

18. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Найти интегралы, используя таблицу интегралов и свойства линейности.

18.1. $\int (x + 1)dx.$

18.2. $\int (3x^2 - x + 1)dx.$

18.3. $\int (8x^7 - 4x^5 + 11x^{12})dx.$

18.4. $\int \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^{11}}{12} + \frac{x}{3}\right)dx.$

18.5. $\int \left(\sqrt{x} + 1\right)dx.$

18.6. $\int \left(\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[4]{x}\right)dx.$

18.7. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-x^3\right)dx.$ **18.8.** $\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-1\right)dx.$

18.9. $\int\left(x^{-\frac{3}{4}}-4\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx.$ **18.10.** $\int\left(\sqrt[3]{x}-7\frac{1}{x^7}+3\right)dx.$

18.11. $\int\left(x^{-\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}\right)dx.$

18.12. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^7}}}-13\frac{x}{\sqrt[3]{x}}+2x\right)dx.$

18.13. $\int\frac{x^3-2x}{3x}dx.$ **18.14.** $\int\frac{x^3-2x}{\sqrt{4x}}dx.$

18.15. $\int\frac{\sqrt{x}-7x}{x}dx.$ **18.16.** $\int\frac{x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{2}{3}}}{x^3}dx.$

18.17. $\int\frac{x^2+1}{x}dx.$ **18.18.** $\int\frac{x^3+3x+5}{x}dx.$

18.19. $\int\frac{x^3-5x^{\frac{3}{2}}}{3x^4}dx.$ **18.20.** $\int\frac{t^2-4t+2}{3t}dt.$

18.21. $\int\left(3e^x-2\sqrt{x}\right)dx.$ **18.22.** $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+5e^x\right)dx.$

18.23. $\int\left(2x^3-3^x\right)dx.$ **18.24.** $\int\left(5^x-\sqrt[5]{x}\right)dx.$

18.25. $\int(5\sin x+2\cos x)dx.$ **18.26.** $\int(3\operatorname{sh}x-7\operatorname{ch}x)dx.$

18.27. $\int\frac{3\cos^2 x-5}{\cos^2 x}dx.$ **18.28.** $\int\frac{5-3\cos^2 x}{\sin^2 x}dx.$

18.29. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-3\cos x\right)dx.$ **18.30.** $\int\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx.$

18.31. $\int\left(\frac{3}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{2}{x}-e^x\right)dx.$ **18.32.** $\int\left(\frac{3+4\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$

18.33. $\int\left(\frac{5}{1+x^2}+\frac{1+x^2}{5}\right)dx.$ **18.34.** $\int\frac{3+2x^2}{1+x^2}dx.$

Найти интегралы, используя подведение под знак дифференциала, преобразование подынтегрального выражения.

18.35. $\int (3x+2)^7\,dx.$

18.36. $\int \frac{1}{(2x-5)^6}\,dx.$

18.37. $\int \sqrt{3x-1}\,dx.$

18.38. $\int \sqrt[3]{7x-3}\,dx.$

18.39. $\int \frac{1}{\sqrt[4]{2-5x}}\,dx.$

18.40. $\int \frac{3}{\sqrt[3]{3-2x}}\,dx.$

18.41. $\int \left(e^{3x}+\frac{1}{x-3}\right)dx.$

18.42. $\int \left(\frac{3}{2x-5}-e^{-3x}\right)dx.$

18.43. $\int \cos 5x\,dx.$

18.44. $\int \sin\frac{2x}{3}\,dx.$

18.45. $\int \sin(3-2x)\,dx.$

18.46. $\int \cos(2-3x)\,dx.$

18.47. $\int \frac{3}{\cos^2(2x+5)}\,dx.$

18.48. $\int \frac{1}{\sin^2(4-3x)}\,dx.$

18.49. $\int \frac{5}{x^2+2x+2}\,dx.$

18.50. $\int \frac{1}{x^2-4x+5}\,dx.$

18.51. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx.$

18.52. $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x}}\,dx.$

Найти интегралы, используя метод интегрирования по частям.

18.53. $\int xe^x\,dx.$

18.54. $\int x\cos x\,dx.$

18.55. $\int x\sin x\,dx.$

18.56. $\int x\ln x\,dx.$

18.57. $\int x\cdot 5^x\,dx.$

18.58. $\int \ln^2 x\,dx.$

18.59. $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx.$

18.60. $\int x^2e^{-x}\,dx.$

Найти интегралы, используя указанную замену переменной.

18.61. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx,\quad t=\sqrt{x}.$

18.62. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx,\quad t=\sqrt{x}.$

18.63. $\int xe^{x^2}\,dx,\quad t=x^2.$

18.64. $\int x\cos x^2\,dx,\quad t=x^2.$

18.65. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx, \ t = \ln x.$ **18.66.** $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}, \ t = \ln x.$

18.67. $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx, \ t = e^x + 1.$ **18.68.** $\int e^x \cos(e^x) dx, \ t = e^x.$

19. ИНТЕГРАЛЫ ОТ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Выделить целую часть рациональной дроби.

19.1. $\frac{2x^2 - 4x + 3}{x + 2}.$ **19.2.** $\frac{3x^2 - 3x + 1}{x - 3}.$

19.3. $\frac{2x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1}.$ **19.4.** $\frac{x^3 + 2x^2 + 3x - 5}{x - 5}.$

19.5. $\frac{x^3 - 4x + 7}{x^2 - 4}.$ **19.6.** $\frac{x^3 - 3x^2 - 7}{x^2 - 1}.$

Разложить правильную рациональную дробь на простейшие дроби.

19.7. $\frac{x - 3}{x^2 - 25}.$ **19.8.** $\frac{x + 4}{x^2 - 9}.$

19.9. $\frac{3x + 5}{x^2 + 2x - 3}.$ **19.10.** $\frac{3x - 1}{x^2 + 4x + 3}.$

19.11. $\frac{8}{x^2 - 5x - 14}.$ **19.12.** $\frac{3}{x^2 - 2x - 15}.$

19.13. $\frac{x^2 + x - 1}{x^3 + 2x^2 - 8x}.$ **19.14.** $\frac{x^2 + 6}{x^3 + 5x^2 + 6x}.$

Вычислить интегралы от простейших рациональных дробей.

19.15. $\int \frac{3}{x - 3} dx.$ **19.16.** $\int \frac{4}{x + 2} dx.$

19.17. $\int \frac{1}{(x + 5)^2} dx.$ **19.18.** $\int \frac{2}{(x - 2)^3} dx.$

19.19. $\int \frac{x + 2}{x^2 + 1} dx.$ **19.20.** $\int \frac{3x - 7}{x^2 + 1} dx.$

19.21. $\int \frac{3x + 2}{x^2 + 4} dx.$ **19.22.** $\int \frac{2x + 5}{x^2 + 4} dx.$

Вычислить интегралы от рациональных функций.

19.23. $\int \frac{2x^2-4x+3}{x+2}dx.$ **19.24.** $\int \frac{3x^2-3x+1}{x-3}dx.$

19.25. $\int \frac{1}{x^2-3x+2}dx.$ **19.26.** $\int \frac{1}{x^2+x-6}dx.$

19.27. $\int \frac{x^3-4x+7}{x^2-4}dx.$ **19.28.** $\int \frac{x^3-3x^2-7}{x^2-1}dx.$

19.29. $\int \frac{x^3-3x+2}{x^2+1}dx.$ **19.30.** $\int \frac{x^2+3x}{x^2+4}dx.$

19.31. $\int \frac{x^2+x-1}{x^3+2x^2-8x}dx.$ **19.32.** $\int \frac{x^2+6}{x^3+5x^2+6x}dx.$

20. ИНТЕГРАЛЫ ОТ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Найти интегралы, используя указанную замену переменной.

20.1. $\int \frac{dx}{5-3\cos x},\ \ t=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right).$

20.2. $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x},\ \ t=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right).$

20.3. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x},\ \ t=\operatorname{tg} x.$

20.4. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x+\cos^2 x},\ \ t=\operatorname{tg} x.$

20.5. $\int \cos^2 x\sin x dx,\ \ t=\cos x.$

20.6. $\int \sin^3 x\cos x dx,\ \ t=\sin x.$

20.7. $\int \sin^2 x\cos^3 x dx,\ \ t=\sin x.$

20.8. $\int \cos^3 x\sin 2x dx,\ \ t=\cos x.$

20.9. $\int \frac{\sin x}{3-\cos x}dx,\ \ t=\cos x.$

20.10. $\int \cos x e^{\cos x}\sin x dx,\ \ t=\cos x.$

Найти интегралы, используя формулы понижения степени.

20.11. $\int \sin^2 x dx.$ **20.12.** $\int \cos^2 x dx.$

20.13. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx.$

20.14. $\int \cos^4 x dx.$

20.15. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx.$

20.16. $\int \sin^6 x dx.$

21. ИНТЕГРАЛЫ ОТ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Найти интегралы, используя указанную замену переменной.

21.1. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}, \; t=\sqrt{x}.$

21.2. $\int \frac{\sqrt{x}}{x^2+x} dx, \; t=\sqrt{x}.$

21.3. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}, \; t=\sqrt[3]{x}.$

21.4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}, \; t=\sqrt[4]{x}.$

21.5. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}, \; t=\sqrt{x+1}.$

21.6. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} dx, \; t=\sqrt{x-1}.$

22. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ФОРМУЛА НЬЮТОНА — ЛЕЙБНИЦА

Вычислить интегралы.

22.1. $\int_1^2 (x^2+1) dx.$

22.2. $\int_0^1 (2x-3) dx.$

22.3. $\int_3^1 \left(2\sqrt{x}-3\right) dx.$

22.4. $\int_4^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-3x\right) dx.$

22.5. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx.$

22.6. $\int_0^{\pi} \sin \frac{x}{3} dx.$

22.7. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}.$

22.8. $\int_9^4 \sqrt{x} dx.$

22.9. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}.$

22.10. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

Вычислить среднее значение функции на указанном отрезке.

22.11. $f(x)=x^2$, [1; 4].

22.12. $f(x)=x^3-3x$, [−1; 1].

22.13. $f(x)=\dfrac{1}{x}$, [1; 2].

22.14. $f(x)=e^{2x}$, [0; ln3].

22.15. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, [1; 4].

22.16. $f(x)=\cos x$, [0, 1].

Нарисовать график функции и проинтегрировать функцию на указанном отрезке.

22.17. $f(x)=\begin{cases} x, & \text{при } x<0, \\ 5x, & \text{при } x\ge 0 \end{cases}$ на $[-3,\ 7]$.

22.18. $f(x)=\begin{cases} -2x, & \text{при } x<0, \\ x, & \text{при } x\ge 0 \end{cases}$ на $[-1,\ 4]$.

22.19. $f(x)=\begin{cases} -1, & \text{при } x<0, \\ x-1, & \text{при } 0\le x<4, \\ -2x, & \text{при } x\ge 4 \end{cases}$ на $[-2,\ 6]$.

22.20. $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{при } x<-2, \\ x+1, & \text{при } -2\le x<0, \\ 2x-1, & \text{при } x\ge 0 \end{cases}$ на $[-10,\ 1]$.

22.21. $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x<0, \\ e^{-4x}, & \text{при } x\ge 0 \end{cases}$ на $[-2,\ 1]$.

22.22. $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x<0, \\ e^{-3x}, & \text{при } x\ge 0 \end{cases}$ на $[-1,\ 5]$.

23. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

23.1. $\int\limits_0^1 (5x+3)e^{2x}dx.$

23.2. $\int\limits_{-1}^0 (2-3x)e^{x}dx.$

23.3. $\int\limits_{-5}^0 (2x^2-8)e^{x}dx.$

23.4. $\int\limits_{-1}^2 (4-3x^2)e^{x}dx.$

23.5. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(2x-5)\cos 3x\,dx.$

23.6. $\int\limits_0^{\pi}(1-2x)\sin\frac{x}{4}\,dx.$

23.7. $\int\limits_0^{3}\frac{(10-3x)dx}{\sqrt{4-x}}.$

23.8. $\int\limits_0^{8}\frac{(2x-1)dx}{\sqrt{9-x}}.$

23.9. $\int\limits_1^{2}\frac{3x\,dx}{\sqrt{5-x^2}}.$

23.10. $\int\limits_3^{1}\frac{6x\,dx}{\sqrt{10-x^2}}.$

23.11. $\int\limits_0^{2}5x\cdot\sin\frac{\pi n x}{2}\,dx.$

23.12. $\int\limits_0^{4}3x\cdot\sin\frac{\pi n x}{4}\,dx.$

23.13. $\int\limits_0^{3}(2x-1)\cdot\sin\frac{\pi n x}{3}\,dx.$

23.14. $\int\limits_0^{5}(7x+3)\cdot\sin\frac{\pi n x}{5}\,dx.$

23.15. $\int\limits_{-3}^{3}xe^{-\frac{x^2}{4}}\,dx.$

23.16. $\int\limits_{-1}^{1}xe^{-\frac{x^2}{16}}\,dx.$

23.17. $\int\limits_0^{2}xe^{-\frac{(x-2)^2}{3}}\,dx.$

23.18. $\int\limits_{-3}^{0}xe^{-\frac{(x+3)^2}{5}}\,dx.$

23.19. $\int\limits_{-1}^{2}(x-1)\cdot e^{x^2-2x+5}\,dx.$

23.20. $\int\limits_0^{4}(x+2)\cdot e^{x^2+4x+5}\,dx.$

23.21. $\int\limits_0^{7}\frac{(x+2)dx}{\sqrt[3]{x+1}}.$

23.22. $\int\limits_6^{-1}\frac{(x+7)dx}{\sqrt[3]{x+2}}.$

23.23. $\int\limits_{65}^{0}\frac{(x-1)dx}{\sqrt[4]{x+16}}.$

23.24. $\int\limits_2^{17}\frac{(x-3)dx}{\sqrt[4]{x-1}}.$

23.25. $\int\limits_0^{1}\frac{(x+10)dx}{1+\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}}.$

23.26. $\int\limits_0^{125}\frac{(x+5)dx}{4+\sqrt{x}+4\sqrt[4]{x}}.$

24. ПРИМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОЩАДЕЙ И ДЛИН ДУГ КРИВЫХ

Вычислить площадь фигур, ограниченных кривыми, заданными в декартовых координатах, изобразить эти фигуры.

24.1. $y=x^2,\ x=2,\ y=0.$

24.2. $y=\sqrt{x},\ y=0,\ x=1.$

24.3. $y=\dfrac{1}{x},\ x=1,\ x=e,\ y=0.$

24.4. $y=e^x,\ x=-1,\ x=0,\ y=0.$

24.5. $y=\ln x,\ y=0,\ x=e,\ y=0.$

24.6. $y=\cos x,\ y=0,\ x=\pi/4,\ x=0.$

24.7. $y=x,\ y=x^2-2.$

24.8. $y=-x,\ y=-x^2+2x.$

24.9. $y=x\ln x,\ y=0,\ y=4.$

24.10. $y=xe^x,\ y=0,\ x=\ln 7.$

Вычислить площадь фигур, ограниченных кривыми, заданными параметрически, изобразить эти фигуры.

24.11. $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t. \end{cases}$

24.12. $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t. \end{cases}$

24.13. $\begin{cases} x=3t^2, \\ y=3t-t^3. \end{cases}$

24.14. $\begin{cases} x=t^2-1, \\ y=t^3-t. \end{cases}$

Вычислить длины дуг кривых.

24.15. $y=\operatorname{ch} x,\ x=1,\ x=3.$

24.16. $y=2x^{3/2},\ x=0,\ x=4.$

24.17. $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t, \\ y=\sin t-t\cos t. \end{cases}$

24.18. $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t. \end{cases}$

25. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Вычислить интегралы с бесконечными пределами по определению или установить расходимость.

25.1. $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{dx}{x^2}.$

25.2. $\int\limits_3^{\infty}\dfrac{dx}{(x-1)^2}.$

25.3. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$. **25.4.** $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

25.5. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. **25.6.** $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$.

25.7. $\int\limits_1^{\infty} x\,dx$. **25.8.** $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \cos x\,dx$.

25.9. $\int\limits_{-\infty}^{-3} \frac{dx}{(1-x)^3}$. **25.10.** $\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

Исследовать на сходимость интеграла с бесконечными пределами.

25.11. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{2x^2+7x-3}$. **25.12.** $\int\limits_3^{\infty} \frac{dx}{x^3-2x^2}$.

25.13. $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x^2+2\sqrt{x}}$. **25.14.** $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$.

25.15. $\int\limits_3^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+3}$. **25.16.** $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$.

25.17. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$. **25.18.** $\int\limits_1^{\infty} \frac{x\,dx}{x^2+1}$.

25.19. $\int\limits_4^{\infty} \frac{(x+1)dx}{x^3+3x+2}$. **25.20.** $\int\limits_1^{\infty} \frac{(x-3)dx}{x\sqrt{x}+2}$.

Вычислить интегралы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ для функций.

25.21. $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\notin[-3,\ 4], \\ 7, & \text{при } x\in[-3,\ 4]. \end{cases}$

25.22. $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\notin[-1,\ 3], \\ 4, & \text{при } x\in[-1,\ 3]. \end{cases}$

25.23. $f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\notin[1,\ 4],\\ 2-x, & \text{при } x\in[1,\ 4].\end{cases}$

25.24. $f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\notin[-3,-1],\\ x+1, & \text{при } x\in[-3,-1].\end{cases}$

25.25. $f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0,\\ e^{-6x}, & \text{при } x\geq 0.\end{cases}$

25.26. $f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0,\\ e^{-2x}, & \text{при } x\geq 0.\end{cases}$

25.27. $f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0,\\ (1-x)\cdot e^{-3x}, & \text{при } x\geq 0.\end{cases}$

25.28. $f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0,\\ (x+2)\cdot e^{-7x}, & \text{при } x\geq 0.\end{cases}$

Зная, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-x^2\}dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$, вычислить интегралы.

25.29. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-x^2-4x\}dx.$

25.30. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-x^2+2x\}dx.$

25.31. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-9x^2+6x-2\}dx.$

25.32. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-4x^2-x+1\}dx.$

25.33. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{\frac{-x^2-4x+3}{\sqrt{2\pi}}\right\}dx.$

25.34. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{\frac{-x^2+2x+3}{\sqrt{5\pi}}\right\}dx.$

V. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ЗАДАЧА КОШИ

Проверить, является ли данная функция решением соответствующего дифференциального уравнения.

1.1. $xy' + y = y^2,\ y = \dfrac{1}{1-x}.$

1.2. $y'\mathrm{tg}x - y = 1,\ y = 3\sin x - 1.$

1.3. $(x-y)dx + xdy = 0,\ y = x(5-\ln x).$

1.4. $dy + (2y - e^x)dx = 0,\ y = 5e^{-2x} + \dfrac{1}{3}e^x.$

1.5. $tv'' = v',\ v = t^2 + 3.$

1.6. $(w'')^2 = w^2,\ w = \dfrac{z^3}{12} + 1.$

1.7. $2y'' = 3y^2,\ y = \dfrac{1}{x+4}.$

1.8. $y''' = \dfrac{1}{x},\ y = x^2 \ln x.$

1.9. $T'' - 4T' + 3T = 0,\ T = 4e^t + 2e^{3t}.$

1.10. $4X'' - 20X' + 25X = 0,\ X = 3e^{2,5t}.$

1.11. $y''' + 9y' = 0,\ y = x\sin 3x.$

1.12. $y^{(IV)} - 13y'' + 36y = 0,\ y = e^x + e^{3x}.$

1.13. $z''' - 3z'' + 3z' - z = 0,\ z = \dfrac{1}{2}e^t.$

1.14. $y^{(IV)} + 8y'' + 16y = \cos x,\ y = \dfrac{1}{9}\cos x.$

1.15. $\ddot{u} - 4\dot{u} + 4u = 1,\ u = \dfrac{1}{4}.$

1.16. $\ddot{w} + w = \mathrm{ch}\,t,\ w = 0{,}5\,\mathrm{ch}\,t.$

Проверить, является ли данная функция решением соответствующей задачи Коши.

1.17. $\begin{cases} y' = 2x, \\ y(0) = 0; \end{cases}$ $y = x^2$.

1.18. $\begin{cases} y' = 3x^2, \\ y(1) = 0; \end{cases}$ $y = x^3 - 1$.

1.19. $\begin{cases} y'' - y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 1; \end{cases}$ $y = e^x$.

1.20. $\begin{cases} y'' + y = 0, \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0, \\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0; \end{cases}$ $y = \cos x$.

1.21. $\begin{cases} xy' + y = y^2 x, \\ y(1) = 1; \end{cases}$ $y = \dfrac{1}{x(1 - \ln x)}$.

1.22. $\begin{cases} y''' = 24x, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 1, \\ y''(0) = 2; \end{cases}$ $y = x^4 + x^2 + x + 1$.

Решить задачу Коши и построить интегральную кривую.

1.23. $\begin{cases} y' = 2x, \\ y(0) = 3. \end{cases}$

1.24. $\begin{cases} y' = 3x^2, \\ y(0) = -1. \end{cases}$

1.25. $\begin{cases} y' = 2e^{2x}, \\ y(0) = 3. \end{cases}$

1.26. $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x}, \\ y(1) = -3. \end{cases}$

1.27. $\begin{cases} y' = \cos x, \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -2. \end{cases}$

1.28. $\begin{cases} y' = \sin x, \\ y(\pi) = 0. \end{cases}$

1.29. $\begin{cases} y'' = 2, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2. \end{cases}$

1.30. $\begin{cases} y'' = \cos x, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$

Для данных уравнений определить область, где существует и единственно решение задачи Коши.

1.31. $y' = x^2 + y^2$.

1.32. $y' = \sqrt{1 - y^2}$.

1.33. $y' = \dfrac{x}{y}$.

1.34. $y' = \dfrac{y+1}{x-y}$.

1.35. $y' = 3\sqrt[3]{y}$.

1.36. $y' = \sqrt{x^2 - y}$.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Найти общее решение или общий интеграл уравнения с разделяющимися переменными.

2.1. $ydx - xdy = 0$.

2.2. $y^2dx - x^3dy = 0$.

2.3. $y' = xy$.

2.4. $y' = \dfrac{e^{-y}}{x}$.

2.5. $y' = \cos^2 x(1+y^2)$.

2.6. $y' = \cos^2 y(1+x^2)$.

2.7. $du + ut^3dt = 0$.

2.8. $dT = Txdx$.

2.9. $y' = e^x y \ln y$.

2.10. $y' = e^y \ln x$.

2.11. $w' = w(x^2 + 2x + 3)$.

2.12. $y' = t(y^2 + 2y + 1)$.

2.13. $\sqrt{1-x^2}\,dy + \sqrt{1-y^2}\,dx = 0$.

2.14. $y' = \sqrt{\dfrac{1+y^2}{1+x^2}}$.

2.15. $\dot{u} = \dfrac{1+u^2}{1+x^2}$.

2.16. $\dot{X} = \dfrac{1+t^2}{1+X^2}$.

2.17. $x' = \dfrac{y\cos y}{2x}$.

2.18. $x' = \dfrac{ye^y}{xe^x}$.

2.19. $y' = 2^{x-y}$.

2.20. $y' = 2^{y-x}$.

Решить задачу Коши для уравнения с разделяющимися переменными.

2.21. $\begin{cases} y' = x^2 y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

2.22. $\begin{cases} y' = 2y^2 x, \\ y(1) = -1. \end{cases}$

2.23. $\begin{cases} \sqrt{1-x^2}\,dy - \dfrac{dx}{2y} = 0, \\ y(0) = 5. \end{cases}$

2.24. $\begin{cases} dy - 2e^{-y}xdx = 0, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

2.25. $\begin{cases} \dot{x} = 2t(1+x^2), \\ x(0) = 1. \end{cases}$

2.26. $\begin{cases} dx - 2t(1+x^2)dt = 0, \\ t(0) = -2. \end{cases}$

2.27. $\begin{cases} ydx + xdy = 0, \\ y\left(\frac{1}{2}\right) = 1. \end{cases}$

2.28. $\begin{cases} y^2dx + x^2dy = 0, \\ y(5) = 7. \end{cases}$

2.29. $\begin{cases} x' = \dfrac{1+t^2}{3x^2}, \\ x(0) = 1. \end{cases}$

2.30. $\begin{cases} y' = \dfrac{1+y^2}{3x^2}, \\ y\left(-\dfrac{4}{3\pi}\right) = 1. \end{cases}$

Найти общее решение или общий интеграл однородного уравнения.

2.31. $y' = 2\dfrac{y}{x} + 1.$

2.32. $y' = \dfrac{4y + x}{x}.$

2.33. $y' = \exp\left(-\dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{y}{x}.$

2.34. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{y}{x} + 1.$

2.35. $x' = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{t^2}} + \dfrac{x}{t}.$

2.36. $x' = \dfrac{\sqrt{t^2 + x^2} + x}{t}.$

2.37. $\dot{u} = \cos^2\dfrac{u}{x} + \dfrac{u}{x}.$

2.38. $\dfrac{dw}{dt} = \dfrac{t^2 + wt - w^2}{t^2}.$

2.39. $y' = \dfrac{x + y\cos\frac{y}{x}}{x\cos\frac{y}{x}}.$

2.40. $y' = \dfrac{x^2\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right) + y^2}{yx}.$

Решить задачу Коши для однородного уравнения.

2.41. $\begin{cases} y' = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}, \\ y(1) = 1. \end{cases}$

2.42. $\begin{cases} y' = \dfrac{y^2 - x^2}{xy}, \\ y(1) = 3. \end{cases}$

2.43. $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{t - 3x}{t}, \\ x(2) = 5. \end{cases}$

2.44. $\begin{cases} x' = \dfrac{t + 3x}{t}, \\ x(5) = 2. \end{cases}$

2.45. $\begin{cases} y' = \sqrt{1 - \dfrac{y^2}{x^2}} + \dfrac{y}{x}, \\ y(1) = 0. \end{cases}$

2.46. $\begin{cases} y' = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2} + y}{x}, \\ y(1) = 0. \end{cases}$

Найти общее решение линейного уравнения.

2.47. $y' + \frac{y}{x} = 1.$

2.48. $y' - \frac{y}{x} = 1.$

2.49. $y' - \frac{y}{x} = x.$

2.50. $y' + \frac{y}{x} = x.$

2.51. $tdx - (x + t^3)dt = 0.$

2.52. $xdw + (w - x^3)dx = 0.$

2.53. $y' + 2y = e^{-x}.$

2.54. $y' - 2y = e^{x}.$

2.55. $y' - 2xy = 2xe^{x^2}.$

2.56. $y' + 2xy = e^{-x^2}.$

Решить задачу Коши для линейного уравнения.

2.57. $\begin{cases} y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}, \\ y(1) = 4. \end{cases}$

2.58. $\begin{cases} y' - \frac{y}{x} = -\ln x, \\ y(1) = 1. \end{cases}$

2.59. $\begin{cases} y' + \frac{y}{x} = e^{x}, \\ y(1) = 0. \end{cases}$

2.60. $\begin{cases} y' + \frac{y}{x} = \frac{\ln x}{x}, \\ y(1) = 3. \end{cases}$

2.61. $\begin{cases} y' + \frac{y}{2x} = x^2, \\ y(1) = 1. \end{cases}$

2.62. $\begin{cases} y' - \frac{y}{2x} = x^3, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

3. ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Найти общее решение дифференциального уравнения последовательным интегрированием.

3.1. $y'' = x.$

3.2. $y'' = e^{x}.$

3.3. $y''' = \sqrt{x}.$

3.4. $y''' = \sqrt[3]{x}.$

3.5. $y''' = \cos 3x.$

3.6. $y^{(IV)} = \sin x.$

Решить задачу Коши.

3.7. $\begin{cases} y'' = e^{2x}, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 3. \end{cases}$

3.8. $\begin{cases} y'' = \sqrt[4]{x}, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = -2. \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} y''' = 1, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 1, \\ y''(0) = 0. \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} y''' = \dfrac{1}{x^5}, \\ y(1) = 3, \\ y'(1) = 2, \\ y''(1) = -1. \end{cases}$

Найти общее решение дифференциального уравнения, вводя новую неизвестную функцию $z(x) = y^{(k)}$.

3.11. $y'''x = y''$.

3.12. $2xy''' = y''$.

3.13. $y''\mathrm{tg}x = y'$.

3.14. $y''' = y''\mathrm{th}(x)$.

3.15. $tx''' + x'' = t$.

3.16. $xw''' - w'' = x$.

Найти общее решение дифференциального уравнения или, если заданы начальные условия, решить задачу Коши, вводя новую неизвестную функцию $p(y) = y'$.

3.17. $y'' = y'^2$.

3.18. $yy'' + y'^2 = 0$.

3.19. $yy'' = y' + y'^2$.

3.20. $y'' = y'y$.

3.21. $\begin{cases} y^3 y'' = -1, \\ y(1) = 1, \\ y'(1) = 1 \end{cases}$

3.22. $\begin{cases} y'' = e^{2y}, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$

4. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Проверить, являются ли данные системы функций линейно независимыми в области определения.

4.1. $1,\ x$.

4.2. $1,\ x,\ x^2$.

4.3. $x,\ 2x,\ x^2$.

4.4. $1,\ 2,\ x$.

4.5. $e^x,\ xe^x$.

4.6. $e^x,\ \cos x,\ e^x \sin x$.

Вычислить определитель Вронского для данных систем функций.

4.7. $x,\ e^x$.

4.8. $x,\ \dfrac{1}{x}$.

4.9. $e^{-x},\ xe^{-x}$.

4.10. $\sin x,\ \cos x$.

Записать фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения, зная корни его характеристического уравнения.

4.11. $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2.$ **4.12.** $\lambda_{1,2}=1.$

4.13. $\lambda_1=0,\ \lambda_{2,3}=2.$ **4.14.** $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3=-1.$

4.15. $\lambda_{1,2,3}=0.$ **4.16.** $\lambda_{1,2}=-3,\ \lambda_3=5.$

4.17. $\lambda_1=3-2i,\ \lambda_2=3+2i.$ **4.18.** $\lambda_1=-3-i,\ \lambda_2=-3+i.$

4.19. $\lambda_1=3i,\ \lambda_2=-3i.$ **4.20.** $\lambda_1=0,\ \lambda_2=-i,\ \lambda_3=i.$

Восстановить линейное однородное дифференциальное уравнение, зная его характеристическое уравнение.

4.21. $9\lambda^2-6\lambda+1=0.$ **4.22.** $\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)=0.$

4.23. $\lambda^2+3\lambda+2=0.$ **4.24.** $(\lambda^2+1)^2=0.$

4.25. $2\lambda^2-3\lambda-5=0.$ **4.26.** $\lambda^3=0.$

Составить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, зная фундаментальную систему решений.

4.27. $e^x,\ e^{-x}.$ **4.28.** $1,\ e^x.$

4.29. $e^x,\ xe^x.$ **4.30.** $1,\ x,\ x^2.$

4.31. $\sin 3x,\ \cos 3x.$ **4.32.** $e^x,\ e^{2x},\ e^{3x}.$

Найти общее решение или, если заданы начальные условия, решить задачу Коши.

4.33. $y''-y=0.$ **4.34.** $y''+y=0.$

4.35. $y''+2y'+y=0.$ **4.36.** $y''-2y'+y=0.$

4.37. $y'''+2y''-y'-2y=0.$ **4.38.** $y'''-2y''+2y'=0.$

4.39. $y'''-3y''+3y'-y=0.$ **4.40.** $y'''+3y''+3y'+y=0.$

4.41. $\begin{cases} y''-4y'+3y=0, \\ y(0)=6, \\ y'(0)=10. \end{cases}$ **4.42.** $\begin{cases} y''-2y'+2y=0, \\ y(0)=0, \\ y'(0)=1. \end{cases}$

4.43. $\begin{cases} y'''+y''=0, \\ y(0)=1, \\ y'(0)=0, \\ y''(0)=1. \end{cases}$ **4.44.** $\begin{cases} y'''+y'=0, \\ y(0)=0, \\ y'(0)=1, \\ y''(0)=-1. \end{cases}$

4.45. $y''' + 4y' = 0.$

4.46. $y''' + 9y' = 0.$

4.47. $y^{(VI)} + 9y'' = 0.$

4.48. $y^{(IV)} + y'' = 0.$

4.49. $y^{(VI)} - 25y^{(IV)} = 0.$

4.50. $y^{(VI)} - 36y^{(IV)} = 0.$

5. МЕТОД ПОДБОРА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Определить вид частного решения, зная корни характеристического уравнения и правую часть $f(x)$ дифференциального уравнения.

5.1. $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ f(x) = 3x + 2.$

5.2. $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0,\ f(x) = 2x + 3.$

5.3. $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0,\ f(x) = 2xe^{-x}.$

5.4. $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ f(x) = 3xe^{-x}.$

5.5. $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0,\ f(x) = 3\sin x.$

5.6. $\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i,\ f(x) = 2\cos x.$

Определить вид частного решения, не находя неопределенных коэффициентов.

5.7. $y'' - 3y' + 2y = 3x + 2.$

5.8. $y'' + y = x^2 - 1.$

5.9. $y'' - 2y' + y = x^2 + 1.$

5.10. $y'' + y' = 2x - 1.$

5.11. $y''' + y'' = x + 5.$

5.12. $y''' + y' = x^2 + x.$

5.13. $y'' - y' = 3e^{2x}.$

5.14. $y'' + y' = (x + 1)e^{x}.$

5.15. $y'' + y = 2xe^{x}.$

5.16. $y'' + y = xe^{-x}.$

5.17. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}.$

5.18. $y''' + 2y'' = xe^{-2x}.$

5.19. $y'' + 3y' + 2y = 3\cos x.$

5.20. $y'' + y = -3\sin x.$

5.21. $y'' + y = \sin 3x.$

5.22. $y''' - y'' = 2x\cos x.$

Найти общее решение неоднородного уравнения.

5.23. $y'' + 2y' + y = -2.$

5.24. $y''' + y'' = 1.$

5.25. $y'' - 4y' + 4y = x^2.$

5.26. $y'' + 8y' = 8x.$

5.27. $y'' + 4y' + 4y = e^{x}.$

5.28. $y'' + 4y' + 3y = 9e^{-3x}.$

5.29. $y'' + y = 2e^{x}.$

5.30. $y'' - y = 2\cos x.$

5.31. $y'' - y' = e^{x}\sin x.$

5.32. $y'' + 2y' = 4e^{x}(\sin x + \cos x).$

Решить задачу Коши.

5.33. $\begin{cases} y'' + y = 2(1-x), \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = -2. \end{cases}$

5.34. $\begin{cases} y'' + 9y = 36e^{3x}, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 6. \end{cases}$

5.35. $\begin{cases} y'' + y' = e^{-x}, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = -1. \end{cases}$

5.36. $\begin{cases} y'' + 4y = \sin x, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$

6. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решить системы, сделать проверку.

6.1. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

6.2. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$

6.3. $\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^{t}, \\ \dot{y} = x + t^2. \end{cases}$

6.4. $\begin{cases} \dot{x} = -y + e^{2t}, \\ \dot{y} = -x - 3t^2. \end{cases}$

6.5. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + \cos 2t, \\ \dot{y} = -2x - 3\sin 2t. \end{cases}$

6.6. $\begin{cases} \dot{x} = 2y + \cos 3t, \\ \dot{y} = -2x - y - 3\sin 3t. \end{cases}$

6.7. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 2x + 1 - t; \end{cases} \begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = -1. \end{cases}$

6.8. $\begin{cases} \dot{x} = 6y + t - 2, \\ \dot{y} = x + y; \end{cases} \begin{cases} x(0) = -1, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

Решить систему методом Эйлера.

6.9. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -2x + 4y. \end{cases}$

6.10. $\begin{cases} \dot{x} = 3x, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$

6.11. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$

6.12. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -2x + y. \end{cases}$

6.13. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$

6.14. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = -x + y. \end{cases}$

6.15. $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

6.16. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + y, \\ \dot{y} = 2y. \end{cases}$

VI. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ (ЧАСТЬ 2). РЯДЫ

1. ЧИСЛОВОЙ РЯД. СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ

Записать развернутое выражение для данного ряда.

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

1.2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$.

1.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$.

1.4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3^n}$.

1.5. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

1.6. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$.

1.7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n-1)!}$.

1.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!!}$.

1.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

1.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

1.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{2n-1}$.

1.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{(2n)^3}$.

Найти по определению сумму геометрического ряда или установить его расходимость.

1.13. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$.

1.14. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}$.

1.15. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2,5}\right)^n$.

1.16. $\sum_{n=0}^{\infty}2^n$.

1.17. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3^n$.

1.18. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{1}{3^{2n}}$.

1.19. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^{2n}}$.

1.20. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{3n}$.

1.21. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln^{2n}(2)$.

1.22. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ln^{3n}(4)$.

Найти по определению сумму ряда, раскладывая общий член ряда на простейшие дроби.

1.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$.

1.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+3)}$.

1.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^2-1}$.

1.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+5)}$.

1.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

1.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

1.29. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{72}{n^2+6n+8}$.

1.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{54}{n^2+5n+4}$.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ НА СХОДИМОСТЬ РЯДОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Проверить выполнение необходимого условия сходимости ряда.

2.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{3n^3+2}$.

2.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n+5}{n^2+4}$.

2.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}(n+2)}{n^3\sqrt{n+4}}$.

2.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n+4}}{(n^2+3)}$.

2.5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln(n-1)}{n+5}$.

2.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{n+3}$.

2.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^n}{n^2}$.

2.8. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{n+3}{\ln(n+5)}$.

Исследовать ряд на сходимость с помощью признаков сравнения.

2.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}$.

2.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n(n+1)}$.

2.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n2^n$.

2.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}3^n$.

2.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+2}$.

2.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+5}$.

2.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{2}{n}\right)}{4^n}$.

2.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{3^n}$.

2.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$.

2.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^{\frac{5}{2}}+1}$.

2.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$.

2.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+3}$.

2.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^4+3}$.

2.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^{\frac{7}{2}}+5}$.

2.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\left(\frac{\pi}{4^n}\right)$.

2.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3^n}\right)$.

2.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5}{n^2 2^n}$.

2.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+4}{n^3 3^n}$.

2.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n+4}{n^4+2n-1}$.

2.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5n+2}{n^3+5n-3}$.

2.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}(n^2+5n)}{n^3+3}$.

2.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}(n+5)}{n^3+4}$.

Исследовать ряд на сходимость с помощью признака Даламбера.

2.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$.

2.32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!}$.

2.33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{n!}$.

2.34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{(2n+1)!}$.

2.35. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!}{(2n)!}$.

2.36. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}$.

2.37. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(3n)!}$.

2.38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$.

Исследовать ряд на сходимость с помощью радикального признака Коши.

2.39. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$.

2.40. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{2n+1}\right)^n$.

2.41. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2}{n^2+1}\right)^n$.

2.42. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2}{3n^2+1}\right)^n$.

2.43. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

2.44. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\left(\frac{3n}{2n+1}\right)^n$.

2.45. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{(\ln n)^n}$.

2.46. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^n}{(n+1)^{2n}}$.

Исследовать ряд на сходимость с помощью интегрального признака Коши.

2.47. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$.

2.48. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)}$.

2.49. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

2.50. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln^3 n}}$.

2.51. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n^2}}$.

2.52. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n3^{n^2}$.

2.53. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$.

2.54. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

3. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

Исследовать на сходимость, установить, условно или абсолютно сходится данный ряд.

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

3.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

3.3. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n-1)}{n+5}$.

3.4. $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{n+3}{\ln(n+5)}$.

3.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n3^n}$.

3.6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n2^n$.

3.7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n}{2n+1}\right)^n$.

3.8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$.

3.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{(2n)!}$.

3.10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(3n)!}{(2n)!}$.

3.11. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}}$.

3.12. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln^3 n}}$.

Вычислить сумму ряда с заданной точностью α.

3.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{1+n^3}$, $\alpha=0{,}1$.

3.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(1+n^3)^2}$, $\alpha=0{,}1$.

3.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+n)3^n}$, $\alpha=0{,}01$.

3.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+2n)4^n}$, $\alpha=0{,}01$.

3.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!}$, $\alpha=0{,}001$.

3.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n n!}$, $\alpha=0{,}001$.

4. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ. ОБЛАСТЬ СХОДИМОСТИ

Найти область сходимости функционального ряда.

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$.

4.2. $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$.

4.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{x^2-3x+3}}$.

4.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{-x^2+2x+4}}$.

4.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^{x^2+2}+3}$.

4.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{n^{x^2+2}+3}$.

4.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n$.

4.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x+1}{2x}\right)^n$.

4.9. $\sum_{n=1}^{\infty}(x^2-4x+3)^n$.

4.10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2-6x-8)^n$.

Доказать равномерную сходимость функционального ряда на $(-\infty, \infty)$.

4.11. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}$.

4.12. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{10^n}$.

4.13. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2(1+n^2x^2)}$.

4.14. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^3(2+\cos nx)}$.

4.15. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$.

4.16. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$.

4.17. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}$.

4.18. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-n^2x^2}}{3^n}$.

5. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Найти область сходимости степенного ряда.

5.1. $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$.

5.2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n$.

5.3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{3^n}$.

5.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n}$.

5.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n^2}$.

5.6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}$.

5.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

5.8. $\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$.

5.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(x-2)^n.$

5.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+2)^n}{n^2 2^n}.$

5.11. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{n \ln n}.$

5.12. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{n \ln^2 n}.$

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности указанной точки и определить область сходимости.

5.13. $y=e^{3x}$, $x_0=0$.

5.14. $y=\ln(1+4x^2)$, $x_0=0$.

5.15. $y=\sin 2x$, $x_0=0$.

5.16. $y=x\cos 3x$, $x_0=0$.

5.17. $y=\dfrac{1}{1-x}$, $x_0=0$.

5.18. $y=\dfrac{1}{1+3x}$, $x_0=0$.

5.19. $y=\ln(1-x-6x^2)$, $x_0=0$.

5.20. $y=\ln(1+x-6x^2)$, $x_0=0$.

5.21. $y=(2-e^x)^2$, $x_0=0$.

5.22. $y=(3-e^x)^2$, $x_0=0$.

5.23. $y=\ln x$, $x_0=1$.

5.24. $y=\dfrac{1}{x}$, $x_0=1$.

5.25. $y=\sin x$, $x_0=2$.

5.26. $y=\cos x$, $x_0=-2$.

5.27. $y=\ln(x+5)$, $x_0=1$.

5.28. $y=\ln(x-3)$, $x_0=1$.

5.29. $y=\dfrac{1}{2-x}$, $x_0=3$.

5.30. $y=\dfrac{1}{x+3}$, $x_0=2$.

5.31. $y=\sin^2 x$, $x_0=0$.

5.32. $y=\cos^2 x$, $x_0=0$.

5.33. $y=\sin 3x$, $x_0=2$.

5.34. $y=\sin 5x$, $x_0=-2$.

Найти сумму степенного ряда, используя его дифференцирование или интегрирование.

5.35. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}.$

5.36. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{n-1}.$

5.37. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$

5.38. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n+1}.$

5.39. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n.$

5.40. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (n+2)x^{n-2}.$

5.41. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (n+1)x^{n-2}.$

5.42. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+4)x^{5n}.$

Вычислить приближенно с точностью 0,001.

5.43. $\int_0^{0,1} e^{-5x^2}dx.$ **5.44.** $\int_0^{0,1} e^{-3x^2}dx.$

5.45. $\int_0^{0,1} \sin(10x^2)dx.$ **5.46.** $\int_0^{0,1} \cos(10x^2)dx.$

5.47. $\int_0^{0,1} \frac{\sin(2x)}{x}dx.$ **5.48.** $\int_0^{0,1} \frac{1-\cos 2x}{x^2}dx.$

5.49. $\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+2x)}{x}dx.$ **5.50.** $\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+3x^2)}{x}dx.$

Используя разложение функций в ряд Тейлора, найти приближенное решение задачи Коши.

5.51. $y''-3xy'+xy+7x=0$, $y(0)=-1$, $y'(0)=5$.

5.52. $y''+xy'-4xy+x=0$, $y(0)=-4$, $y'(0)=-1$.

5.53. $(x-1)^2y''-3y'-2y+\cos x=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

5.54. $(x+2)^2y''+2y'-y-\sin x=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

5.55. $\begin{cases}\dot{x}=2x-y,\\ \dot{y}=x+1-t;\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=1,\\ y(0)=-1.\end{cases}$

5.56. $\begin{cases}\dot{x}=y+t-2,\\ \dot{y}=-2x+5y;\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=-1,\\ y(0)=1.\end{cases}$

5.57. $\begin{cases}\dot{x}=3x-y+t^2-8t,\\ \dot{y}=-5x+2y+1-t;\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=2,\\ y(0)=0.\end{cases}$

5.58. $\begin{cases}\dot{x}=2x+3y+t^2+t-1,\\ \dot{y}=x+2y-2t+1;\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=0,\\ y(0)=1.\end{cases}$

5.59. $\begin{cases}\dot{x}=y+e^{-2t}(t+1),\\ \dot{y}=x-te^{3t};\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=1,\\ y(0)=-1.\end{cases}$

5.60. $\begin{cases}\dot{x}=-y+te^{t},\\ \dot{y}=-2x+(t-3)e^{-4t};\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=-2,\\ y(0)=2.\end{cases}$

6. РЯДЫ ФУРЬЕ

Следующие функции разложить в ряд Фурье на указанных отрезках: а) в полный ряд Фурье по синусам и косинусам; б) только по синусам; в) только по косинусам, изобразить графики сумм соответствующих рядов Фурье.

6.1. $y=5-x$. а) $[-\pi, \pi]$; б) $[0, \pi]$; в) $[0, \pi]$.

6.2. $y=1+x$. а) $[-\pi, \pi]$; б) $[0, \pi]$; в) $[0, \pi]$.

6.3. $y=1+2x$. а) $[-\pi, \pi]$; б) $[0, \pi]$; в) $[0, \pi]$.

6.4. $y=3-2x$. а) $[-\pi, \pi]$; б) $[0, \pi]$; в) $[0, \pi]$.

6.5. $y=9-2x^2$. а) $[-\pi, \pi]$; б) $[0, \pi]$; в) $[0, \pi]$.

6.6. $y=4+3x^2$. а) $[-\pi, \pi]$; б) $[0, \pi]$; в) $[0, \pi]$.

6.7. $y=6x$. а) $[-\pi, \pi]$; б) $[0, \pi]$; в) $[0, \pi]$.

6.8. $y=-5x$. а) $[-\pi, \pi]$; б) $[0, \pi]$; в) $[0, \pi]$.

6.9. $y=2+|x|$. а) $[-\pi, \pi]$; б) $[0, \pi]$; в) $[0, \pi]$.

6.10. $y=7-|x|$. а) $[-\pi, \pi]$; б) $[0, \pi]$; в) $[0, \pi]$.

6.11. $y=2x^2+3$. а) $[-\pi, \pi]$; б) $[0, \pi]$; в) $[0, \pi]$.

6.12. $y=1-3x^2$. а) $[-\pi, \pi]$; б) $[0, \pi]$; в) $[0, \pi]$.

Указанные функции разложить в ряд Фурье: а) по синусам; б) по косинусам на указанных отрезках.

6.13. $y=4+x$, $[0, 3\pi]$.

6.14. $y=1-9x$, $[0, 2\pi]$.

6.15. $y=-3x$, $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$.

6.16. $y=5x$, $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

6.17. $y=1-x$, $[0, 2]$.

6.18. $y=1+x$, $[0, 3]$.

6.19. $y=1+9x$, $[-6, 0]$.

6.20. $y=2-7x$, $[-1, 0]$.

6.21. $y=3-7x$, $\left[0, \dfrac{1}{7}\right]$.

6.22. $y=6+3x$, $\left[0, \dfrac{1}{5}\right]$.

6.23. $y=8$, $[0, 4\pi]$.

6.24. $y=3$, $[0, 3\pi]$.

Функцию разложить в ряд Фурье по данной системе функций и найти длину отрезка, на котором такое разложение справедливо.

6.25. $y=2$ по $\left\{\sin\dfrac{\pi n x}{3}\right\}$.

6.26. $y=-3$ по $\left\{\sin\dfrac{\pi n x}{2}\right\}$.

6.27. $y = x - 1$ по $\{\sin 2nx\}$. **6.28.** $y = x + 2$ по $\{\sin 3nx\}$.

6.29. $y = 2 + 2x$ по $\left\{\cos\frac{\pi n x}{4}\right\}$. **6.30.** $y = 1 - 2x$ по $\left\{\cos\frac{\pi n x}{3}\right\}$.

Найти коэффициенты ряда Фурье по системе функций $\left\{\sin\frac{\pi n x}{l},\ \cos\frac{\pi n x}{l}\right\}$ на отрезке $[-l, l]$.

6.31. $y = \sin^2 3x,\ l = \pi$.

6.32. $y = \cos^2 4x,\ l = \pi$.

6.33. $y = \sin 3x \cdot \cos 6x + \cos 2x,\ l = 4\pi$.

6.34. $y = \sin 4x \cdot \cos 5x + \sin 2x,\ l = 3\pi$.

6.35. $y = \sin^3 3\pi x - 2\cos^2 \pi x,\ l = 3$.

6.36. $y = \cos^3 5\pi x + 8\sin^2 \pi x,\ l = 2$.

VII. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ (ЧАСТЬ 3). КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. ПОВТОРНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Вычислить повторные интегралы.

1.1. $\int_0^1 dx \int_0^1 (x+y)dy.$

1.2. $\int_0^1 dy \int_0^2 (x^2+y)dx.$

1.3. $\int_0^1 dx \int_0^x (x+y)dy.$

1.4. $\int_0^1 dy \int_0^y (x^2+y)dx.$

1.5. $\int_0^1 dx \int_1^x xdy.$

1.6. $\int_0^1 dy \int_2^{y^2} xdx.$

1.7. $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x+z)dz.$

1.8. $\int_0^1 dy \int_0^1 dz \int_0^y (x+z)dx.$

1.9. $\int_0^1 dy \int_0^y dx \int_0^y ydz.$

1.10. $\int_0^1 dx \int_1^{x^2} dy \int_0^{x^2+y^2} x^2dz.$

2. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Вычислить двойной интеграл по прямоугольной области.

2.1. $\iint_D xydS;\ \ D: 1 \le x \le 2,\ \ 0 \le y \le 3.$

2.2. $\iint_D x^2ydS;\ \ D: 1 \le x \le 3,\ \ 0 \le y \le 1.$

2.3. $\iint_D (x+y)dS;\ \ D: 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1.$

2.4. $\iint\limits_D (x^2+y)dS;\ D: 1 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 3.$

2.5. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dS;\ D: 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2.$

2.6. $\iint\limits_D (3x^2-y^2)dS;\ D: 0 \le x \le 2;\ 0 \le y \le 2.$

Вычислить двойной интеграл по произвольной области, ограниченной заданными кривыми.

2.7. $\iint\limits_D dS;\ D: y = x^2,\ y = \sqrt{x}.$

2.8. $\iint\limits_D dS;\ D: y = x^2,\ y = x.$

2.9. $\iint\limits_D dS;\ D: y = x^2,\ y = x^3.$

2.10. $\iint\limits_D dS,\ D: y = x,\ y = x^3.$

2.11. $\iint\limits_D xdS;\ D: y = x^2,\ y = \sqrt{x}.$

2.12. $\iint\limits_D ydS;\ D: y = x^2,\ y = x.$

2.13. $\iint\limits_D (x+y)dS;\ D: y = x^2,\ y = x^3.$

2.14. $\iint\limits_D (x-y)dS;\ D: y = x^3,\ y = x.$

2.15. $\iint\limits_D xdS;\ D: y = x,\ y = 1-x,\ y = 0.$

2.16. $\iint\limits_D ydS;\ D: y = x,\ y = 1-x,\ y = 0.$

2.17. $\iint\limits_D xdS;\ D: y = x,\ y = 1-x,\ x = 0.$

2.18. $\iint\limits_D ydS;\ D: y = x,\ y = 1-x,\ x = 0.$

2.19. $\iint\limits_D (x+y)dS;\ D: y = x,\ y = 1-x,\ x = 0.$

2.20. $\iint\limits_D (x-y)dS;\ D: y = \sqrt{x},\ y = 1-x,\ y = 0.$

3. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Вычислить тройной интеграл по прямоугольной области.

3.1. $\iiint\limits_V (x+y+z)dV;$

V: $0\le x\le 1;$
$0\le y\le 1;$
$0\le z\le 1.$

3.2. $\iiint\limits_V (x-y-z)dV;$

V: $0\le x\le 1;$
$0\le y\le 2;$
$0\le z\le 3.$

3.3. $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dV;$

V: $0\le x\le 1;$
$1\le y\le 2;$
$2\le z\le 3.$

3.4. $\iiint\limits_V (-x^2-y^2+z^2)dV;$

V: $1\le x\le 2;$
$1\le y\le 2;$
$1\le z\le 2.$

3.5. $\iiint\limits_V \left(x+\frac{1}{y}\right)dV;$

V: $0\le x\le 1;$
$1\le y\le e;$
$0\le z\le 1.$

3.6. $\iiint\limits_V x\sin y dV;$

V: $0\le x\le 1;$
$0\le y\le \pi/2;$
$0\le z\le 3.$

Вычислить тройной интеграл по произвольной области, ограниченной заданными поверхностями.

3.7. $\iiint\limits_V dV;$

$V: y=x^2,\ \ y=\sqrt{x};$
$z=0,\ z=3.$

3.8. $\iiint\limits_V dV;$

V: $y=x^2,\ y=x;$
$z=3;\ z=0.$

3.9. $\iiint\limits_V dV;$

V: $y=x^2,\ y=x^3;$
$z=0,\ z=3-x-y.$

3.10. $\iiint\limits_V dV;$

V: $y=x^3,\ y=x;$
$z=0,\ z=2-x-y.$

3.11. $\iiint\limits_V x dV;$

V: $y=x^2,\ z=0;$
$z=3,\ y=\sqrt{x}.$

3.12. $\iiint\limits_V y dV;$

V: $y=x^2,\ z=0;$
$y=x,\ z=-3.$

3.13. $\iiint\limits_V (x+y+z)dV$;

V: $y=x^2$, $y=x^3$;

$z=0$, $z=1$.

3.14. $\iiint\limits_V (x-y-z)dV$;

V: $y=x^3$, $y=x$;

$z=5$, $z=6$.

3.15. $\iiint\limits_V (x+z)dV$;

V: $y=x$, $y=1-x$;

$y=0$, $z=0$, $z=1$.

3.16. $\iiint\limits_V (y+z)dV$;

V: $y=x$, $y=1-x$;

$y=0$, $z=-1$, $z=1$.

3.17. $\iiint\limits_V y\,dV$;

V: $x=0$, $y=0$, $z=0$;

$x+y+z=1$.

3.18. $\iiint\limits_V x\,dV$;

V: $x=0$, $y=0$, $z=0$;

$x+y+z=2$.

3.19. $\iiint\limits_V (z-y)dV$;

V: $x=0$, $y=0$, $z=0$;

$x+y+z=-1$.

3.20. $\iiint\limits_V (z-x)dV$;

V: $x=0$, $y=0$, $z=0$;

$x+y+z=-2$.

4. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Вычислить, переходя к полярным координатам.

4.1. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2dS}$;

D: $x^2+y^2\le 1$;

$x\ge 0$, $y\ge 0$.

4.2. $\iint\limits_D \sqrt[3]{x^2+y^2dS}$;

D: $x^2+y^2\le 1$;

$y\ge x$, $y\ge 0$.

4.3. $\iint\limits_D \left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)dS$;

D: $x^2+y^2\le 1$;

$x\ge 0$.

4.4. $\iint\limits_D \left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)dS$;

D: $x^2+y^2\le 1$;

$y\ge 0$.

4.5. $\iint\limits_D \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

D: $1\le x^2+y^2\le 4$;

$x\ge 0$, $y\ge 0$.

4.6. $\iint\limits_D \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

D: $1\le x^2+y^2\le 9$;

$x\ge 0$, $y\ge x$.

4.7. $\iint\limits_D \sqrt{(x^2+y^2)^3}\,dS$;

D: $x \le 0$, $y \le 0$;
$x^2+y^2 \le 1$.

4.8. $\iint\limits_D \sqrt{(x^2+y^2)^3}\,dS$;

D: $x \le 0$, $y \ge -x$;
$x^2+y^2 \le 9$.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными кривыми.

4.9. $y^2-2x+x^2=0$;
$y=0$, $y=x$.

4.10. $y^2-4x+x^2=0$;
$x=0$, $y=x$.

4.11. $y^2-4y+x^2=0$;
$y=0,\ y=\sqrt{3}x$.

4.12. $y^2-8y+x^2=0$;
$y=0,\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

4.13. $y^2-2y+x^2=0,\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$;
$y^2-4y+x^2=0,\ y=\sqrt{3}x$.

4.14. $y^2-4x+x^2=0,\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$;
$y^2-8x+x^2=0$, $y=0$.

5. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

5.1. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,z\,dV$;

V: $x^2+y^2 \le 1$;
$x \ge 0$, $z \ge 0$;
$y \ge 0$, $z \le 1$.

5.2. $\iiint\limits_V \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\,dV$;

V: $x^2+y^2 \le 1$;
$y \ge 0$, $z \ge 1$;
$y \ge x$, $z \le e$.

5.3. $\iiint\limits_V \dfrac{dV}{z\sqrt{x^2+y^2}}$;

V: $1 \le x^2+y^2 \le 4$;
$x \le 0$, $y \le 0$;
$1 \le z \le 3$.

5.4. $\iiint\limits_V \dfrac{z\,dV}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

V: $x^2+y^2 \le 9$;
$x \ge 0$, $y \ge x$;
$0 \le z \le 1$.

Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями.

5.5. $y^2-2y+x^2=0;$
$x=0,\ y=x;$
$z=0,\ z=9.$

5.6. $y^2-4x+x^2=0;$
$y=0,\ y=x;$
$z=0,\ z=3.$

5.7. $y^2-4y+x^2=0;$
$x=0,\ \ y=\sqrt{3}x;$
$z=0,\ z=x^2+y^2.$

5.8. $y^2-8x+x^2=0;$
$x=0,\ \ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}};$
$z=0,\ z=-x^2-y^2.$

6. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ В СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями.

6.1. $z\ge 0;\ \ x^2+y^2+z^2=1.$

6.2. $z\le 0;\ x^2+y^2+z^2=4.$

6.3. $z\ge\sqrt{x^2+y^2};\ \ z\le\sqrt{1-x^2-y^2}.$

6.4. $z\le-\sqrt{x^2+y^2};\ \ z\le\sqrt{1-x^2-y^2}.$

6.5. $-\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{x^2+y^2};\ \ z^2+x^2+y^2=1.$

6.6. $-\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{x^2+y^2};\ \ 1\le z^2+x^2+y^2\le 4.$

Вычислить тройной интеграл.

6.7. $\iiint\limits_V\left(x^2+y^2+z^2\right)dV;$
$V:\ \ 0\le z\le\sqrt{x^2+y^2};$
$z\le\sqrt{4-x^2-y^2}.$

6.8. $\iiint\limits_V\left(x^2+y^2+z^2\right)dV;$
$V:\ \ z\ge-\sqrt{1-x^2-y^2};$
$-\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 0.$

6.9. $\iiint\limits_V\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}\,dV;$
$V:\ \ z\le\sqrt{x^2+y^2};$
$z\le\sqrt{1-x^2-y^2}.$

6.10. $\iiint\limits_V\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}\,dV;$
$V:\ 1\le x^2+y^2+z^2\le 4.$

VIII. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ (ЧАСТЬ 4). ТЕОРИЯ ПОЛЯ

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Вычислить градиент скалярного поля в указанных точках.

1.1. $u = \dfrac{x^2 z}{y}$, $M(1,\ 2,\ 3)$.

1.2. $u = \dfrac{xy^2}{z}$, $M\ (1,\ 2,\ 3)$.

1.3. $u = \dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{y} + \dfrac{2}{z}$, $M(1,\ 1,\ 1)$.

1.4. $u = \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3}{y^2} + \dfrac{5}{z^3}$, $M\ (1,\ 1,\ 1)$.

1.5. $u = x^2 + \cos yz$, $M\ (1,\ \pi,\ 1/2)$.

1.6. $u = y^2 - \sin xz$, $M\ (1/2,\ 5,\ \pi)$.

1.7. $u = xe^{yz}$, $M\ (1,\ 1,\ 1)$.

1.8. $u = ye^{2xz}$, $M\ (1,\ 1,\ 1)$.

1.9. $u = y\ln(x+z)$, $M\ (2,\ 3,\ 4)$.

1.10. $u = x\ln(2y+3z)$, $M\ (1,\ 1,\ 1)$.

Вычислить дивергенцию векторного поля в указанных точках.

1.11. $\vec{a} = \{3x^2,\ 2y+z,\ z-2y\}$, $M(0,\ 1,\ 1)$.

1.12. $\vec{a} = \{3y^2,\ 2x+y,\ z^3-x\}$, $M(5,\ 1,\ 3)$.

1.13. $\vec{a} = \{\cos xy,\ \sin xy,\ \tan z\}$, $M\left(1,\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{4}\right)$.

1.14. $\vec{a} = \{\sin xz,\ \cos yz,\ \sin 3z\}$, $M\left(1,\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

1.15. $\vec{a}=\{x+e^{2y},\ y+e^{2z},\ z+e^{2x}\}$, $M(1,\ 1,\ 1)$.

1.16. $\vec{a}=\{y+2e^{x},\ x+e^{2y},\ 2z+e^{x}\}$, $M(1,\ 1,\ 0)$.

1.17. $\vec{a}=\{\ln(2x+z),\ \ln z,\ \ln(x-z)\}$, $M(2,\ 5,\ 7)$.

1.18. $\vec{a}=\{2^{x+y},\ 3^{x+2y},\ 4^{y-x}\}$, $M(0,\ 1,\ 0)$.

1.19. $\vec{a}=\{y^2+e^{2z},\ x^2+e^{3z},\ y^2+e^{2x}\}$, $M(0,\ 0,\ 0)$.

1.20. $\vec{a}=\{y^2+\ln z,\ x^2+\ln 3y,\ z^3\}$, $M(0,\ 1,\ 1)$.

Вычислить ротор векторного поля.

1.21. $\vec{a}=\{y,\ -2x,\ z^2\}$.

1.22. $\vec{a}=\{3z,\ -2y,\ 2y\}$.

1.23. $\vec{a}=\{x,\ yz,\ -z\}$.

1.24. $\vec{a}=\{yz,\ 2xz,\ xy\}$.

1.25. $\vec{a}=\{x,\ -3z^2,\ y\}$.

1.26. $\vec{a}=\{\sin x,\ 2z^2,\ e^{2y}\}$.

1.27. $\vec{a}=\{-x^2y^3,\ 4,\ x\}$.

1.28. $\vec{a}=\{3y,\ -3x,\ x\}$.

2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

Вычислить поток векторного поля через замкнутую поверхность с помощью формулы Остроградского.

2.1. $\vec{a}=\{2x,\ e^{x},\ e^{y}\}$;

S: $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

2.2. $\vec{a}=\{x,\ 3y,\ e^{x}\}$;

S: $x-2y+z=0$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

2.3. $\vec{a}=\{z^2+2x,\ -2y,\ 2z\}$;

S: $x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=4$.

2.4. $\vec{a}=\{e^{y}+2x,\ \sin z-y,\ 5z+x^2\}$;

S: $x^2+y^2=z^2$, $z=0$, $z=4$.

2.5. $\vec{a}=\{z,\ -4y,\ 2x\}$;

S: $z=x^2+y^2$, $z=1$.

2.6. $\vec{a}=\{x+z,\ x-2y,\ x\}$;

S: $x^2+y^2=1$, $z=x^2+y^2$, $z=0$.

2.7. $\vec{a}=\{2x,\ y,\ -z\}$;

S: $z=8-x^2-y^2$, $z=x^2+y^2$.

2.8. $\vec{a}=\{3x,\ y,\ -z\}$;

S: $z=6-x^2-y^2$, $z^2=x^2+y^2$, $z\geq 0$.

Вычислить циркуляцию векторного поля вдоль замкнутого контура L, лежащего в плоскости $x0y$ (обход против часовой стрелки).

2.9. $\vec{a}=\{x^2-y,\ 3x\}$;

L: треугольник с вершинами $A(0,\ 0)$, $B(1,\ 2)$, $C(-1,\ 2)$.

2.10. $\vec{a}=\{3y-x,\ y\}$;

L: треугольник с вершинами $A(0,\ 0)$, $B(2,\ 1)$, $C(-3,\ 2)$.

2.11. $\vec{a}=\{x,\ -3z^2,\ y\}$;

$$L:\ \text{окружность}\ \begin{cases} x^2+y^2=4, \\ z=0. \end{cases}$$

2.12. $\vec{a}=\{0,\ -x,\ y\}$;

$$L:\ \text{окружность}\ \begin{cases} x^2+y^2=9, \\ z=0. \end{cases}$$

2.13. $\vec{a}=\{3x+5,\ 2y\}$;

L: прямоугольник с вершинами $A(4,\ 1)$, $B(-4,\ 1)$, $C(-4,\ -1)$, $D(4,\ -1)$.

2.14. $\vec{a}=\{5x+3,\ y-2\}$;

L: прямоугольник с вершинами $A(0,\ 0)$, $B(3,\ 0)$, $C(3,\ 2)$, $D(0,\ 2)$.

Вычислить модуль циркуляции векторного поля $\vec{a}$ вдоль замкнутого контура L.

2.15. $\vec{a}=\{2z,\ x,\ -2y\}$, L: треугольник с вершинами

$O(0,\ 0,\ 0)$, $A(0,\ 1,\ 0)$ и $B(0,\ 1,\ -7)$.

2.16. $\vec{a}=\{2y,\ z,\ -2x\}$, L: треугольник с вершинами

$O(0,\ 0,\ 0)$, $A(4,\ 0,\ 0)$ и $B(4,\ 1,\ 0)$.

2.17. $\vec{a}=\{x-y,\ y+z,\ z-3x\}$, L: линия пересечения

параболоида $z=4x^2+y^2$ с плоскостью $z=8$.

2.18. $\vec{a} = \{x+z,\ y-3z,\ z-2y\}$, L: линия пересечения параболоида $z = x^2 + 9y^2$ с плоскостью $z = 81$.

Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через площадку S в направлении вектора $\vec{n}$.

2.19. $\vec{a} = \{1+z,\ 0,\ z^2\}$, $\vec{n} = -\vec{k}$, S: прямоугольник со сторонами 2 и 6, лежащий в плоскости $z = -3$.

2.20. $\vec{a} = \{4,\ x-2,\ x^3\}$, $\vec{n} = \vec{i}$, S: прямоугольник со сторонами 1 и 5, лежащий в плоскости $x = 2$.

2.21. $\vec{a} = \{0,\ x+1,\ 2x\}$, $\vec{n} = -\vec{i}$, S: круг радиусом 3, лежащий в плоскости $x = 0$.

2.22. $\vec{a} = \{0,\ y+6,\ y-1\}$, $\vec{n} = \vec{j}$, S: круг радиусом 1, лежащий в плоскости $y = 0$.

2.23. $\vec{a} = \{2z+3,\ xy+6,\ x-1\}$, третья координата вектора $\vec{n}$ отрицательна, S: часть плоскости $2x + 4y + z = 8$, лежащая в первом октанте.

2.24. $\vec{a} = \{3y-z,\ zy,\ 1-5x\}$, третья координата вектора $\vec{n}$ положительна, S: часть плоскости $x + 3y + 9z = 9$, лежащая в первом октанте.

Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через часть поверхности S, ограниченную плоскостью P. Нормаль внешняя.

2.25. $\vec{a} = \{2,\ -1,\ 7\}$, S: $z + 2 = x^2 + y^2$, P: плоскость $z = 2$.

2.26. $\vec{a} = \{1,\ 3,\ -5\}$, S: $z - 3 = -x^2 - y^2$, P: плоскость $z = -1$.

2.27. $\vec{a} = \{1,\ z,\ 0\}$, $S: z = -\sqrt{x^2 + y^2}$, P: плоскость $z = -1$.

2.28. $\vec{a} = \{z,\ 0,\ -1\}$, $S: z = \sqrt{x^2 + y^2}$, P: плоскость $z = 3$.

IX. ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

1. УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ

Зная фундаментальную систему решений обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, исследовать устойчивость его нулевого решения.

1.1. $y_1 = e^{-3t}$.

1.2. $y_1 = e^{-2t}$.

1.3. $y_1 = e^{4t}$.

1.4. $y_1 = e^{t}$.

1.5. $y_1 = \sin 2t$, $y_2 = \cos 2t$.

1.6. $y_1 = \sin 8t$, $y_2 = \cos 8t$.

1.7. $y_1 = 1$, $y_2 = t$, $y_3 = e^{-t}$.

1.8. $y_1 = 1$, $y_2 = t$, $y_3 = e^{t}$.

1.9. $y_1 = e^{t}\sin 3t$, $y_2 = e^{t}\cos 3t$.

1.10. $y_1 = e^{-3t}\sin t$, $y_2 = e^{-3t}\cos t$.

Исследовать устойчивость нулевого решения обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, если даны все корни характеристического уравнения.

1.11. $2, -6$.

1.12. $5, -1$.

1.13. $-2, -8, -4$.

1.14. $3, 2, -1$.

1.15. $6 \pm i$.

1.16. $-1 \pm 6i$.

1.17. $-1 \pm 2i$, $3/2 \pm i$.

1.18. $1 \pm i$, $2 \pm i$.

Исследовать устойчивость нулевого решения обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Изобразить интегральные кривые.

1.19. $y' + 2y = 0$.

1.20. $y' + 3y = 0$.

1.21. $y' - 5y = 0$.

1.22. $y' - 2y = 0$.

1.23. $y' + 0{,}5y = 0$.

1.24. $y' - 1{,}4y = 0$.

1.25. $y' - 3{,}1y = 0.$ **1.26.** $y' + 0{,}4y = 0.$

Исследовать устойчивость нулевого решения обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

1.27. $y'' + 4y = 0.$ **1.28.** $y'' + 2y = 0.$

1.29. $y'' - 5y = 0.$ **1.30.** $y'' - 3y = 0.$

1.31. $y'' + 2y' - 3y = 0.$ **1.32.** $y'' + y' - 2y = 0.$

1.33. $y'' - 5y' - 6y = 0.$ **1.34.** $y'' + 2y' + 2y = 0.$

1.35. $y'' + 4y' + 5y = 0.$ **1.36.** $y'' - y' + 8y = 0.$

1.37. $y'' - 2y' + 6y = 0.$ **1.38.** $y'' + 2y' + 5y = 0.$

2. ТОЧКИ ПОКОЯ

Найти точку покоя системы, изобразить ее на плоскости и, сделав замену переменных, получить однородную систему.

2.1. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 3, \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$ **2.2.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + y - 1. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 5, \\ \dot{y} = x - y - 1. \end{cases}$ **2.4.** $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y - 3, \\ \dot{y} = x + 2y + 3. \end{cases}$

Найти систему первого (линейного) приближения в окрестности точки $O\,(0,\ 0)$ для данной системы дифференциальных уравнений.

2.5. $\begin{cases} \dot{x} = 2x^2 + y^2 - x - y, \\ \dot{y} = x^3 - y. \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 6x - y, \\ \dot{y} = x^5 - y^2 + 3x - 7y. \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} \dot{x} = 2x^2 + y + \cos(2y) - e^x, \\ \dot{y} = e^{2x+y} - y - 1. \end{cases}$

2.8. $\begin{cases} \dot{x} = 2y^2 + 2y + \cos(3y) - e^{2x}, \\ \dot{y} = e^{2x+y} - \operatorname{tg}(x - y) - 1. \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} \dot{x} = (1-5x)^{-1} - 1 + y\cos y, \\ \dot{y} = \sin(3x+2y) - y^3 e^x. \end{cases}$

2.10. $\begin{cases} \dot{x} = (1+x)^{-2} - 1 + 2y\cos(xy), \\ \dot{y} = \operatorname{tg}(x-5y) - xe^{3x}. \end{cases}$

2.11. $\begin{cases} \dot{x} = 0{,}25\cdot\left(\sqrt[5]{1+10x} - \sqrt[5]{1+5x}\right), \\ \dot{y} = \ln\left(\dfrac{1+y+x^2}{5}\right) - \sin y. \end{cases}$

2.12. $\begin{cases} \dot{x} = \ln\left(4y + e^{-4x} + x\right), \\ \dot{y} = \sqrt[3]{1-6x} + \sin 2y - 1. \end{cases}$

Определить тип точки покоя $O\,(0,\ 0)$ системы уравнений, нарисовать фазовый портрет в окрестности этой точки.

2.13. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y, \\ \dot{y} = 2x. \end{cases}$

2.14. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 2y, \\ \dot{y} = 2x. \end{cases}$

2.15. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$

2.16. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 2y, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$

2.17. $\begin{cases} \dot{x} = 2x, \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$

2.18. $\begin{cases} \dot{x} = -x, \\ \dot{y} = 2y. \end{cases}$

2.19. $\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = -2x. \end{cases}$

2.20. $\begin{cases} \dot{x} = 2y, \\ \dot{y} = 3x. \end{cases}$

2.21. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

2.22. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 4y, \\ \dot{y} = -2x + y. \end{cases}$

2.23. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y, \\ \dot{y} = -3x + y. \end{cases}$

2.24. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y, \\ \dot{y} = 3x + 2y. \end{cases}$

2.25. $\begin{cases} \dot{x} = -2x, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

2.26. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$

2.27. $\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$

2.28. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 4x + 2y. \end{cases}$

Исследовать устойчивость нулевого решения системы (по первому приближению).

2.29. $\begin{cases} \dot{x} = 2x^3 - \sin(5y) - e^x + 1, \\ \dot{y} = e^x - y - 1. \end{cases}$

2.30. $\begin{cases} \dot{x} = 1 + \sin(2x^2 + y) - \cos(2y), \\ \dot{y} = 2e^{2x+y} - 2. \end{cases}$

2.31. $\begin{cases} \dot{x} = 1 + 2x^2 + y^3 + \cos(2y) - e^x, \\ \dot{y} = e^{2x+y} - 3y - 1. \end{cases}$

2.32. $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{8}(e^{2x} - 1) - \sin 9y, \\ y' = \dfrac{1}{5}\ln(1 + y) - \sin y. \end{cases}$

2.33. $\begin{cases} \dot{x} = 2x^2 + y + \sin(2y), \\ \dot{y} = \ln(1 - 2x - y) - y - xy. \end{cases}$

2.34. $\begin{cases} \dot{x} = -6x^2 + 2y + \operatorname{tg}(2y - x), \\ \dot{y} = \ln(1 + x) - 3y - x^2 y. \end{cases}$

Исследовать на устойчивость точку покоя $O(0, 0)$ системы в зависимости от значений параметра α. Определить тип точки покоя в каждом из случаев.

2.35. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2\alpha y, \\ \dot{y} = 3x - y. \end{cases}$

2.36. $\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = \alpha x - 2y. \end{cases}$

2.37. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2\alpha y, \\ \dot{y} = -2x - 5y. \end{cases}$

2.38. $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 2\alpha x + y. \end{cases}$

2.39. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - \alpha y, \\ \dot{y} = 3x - y. \end{cases}$

2.40. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + \alpha y, \\ \dot{y} = 3x + y. \end{cases}$

X. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Найти действительную и мнимую части числа, его модуль и аргумент, комплексно сопряженное число, изобразить на комплексной плоскости.

1.1. $1+i$.

1.2. $-1+i$.

1.3. i.

1.4. $2i$.

1.5. $\sqrt{2}$.

1.6. 1.

1.7. 0.

1.8. $-\pi$.

1.9. $4-3i$.

1.10. $-12+5i$.

1.11. $\exp(2-i)$.

1.12. $\exp(-1-2i)$.

1.13. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+i\right)$.

1.14. $\cos\left(\frac{\pi}{3}+i\right)$.

1.15. $\ln(-3i)$.

1.16. $\ln(2i)$.

Решить уравнение и изобразить его корни на комплексной плоскости. Сделать проверку.

1.17. $2z-i=0$.

1.18. $4z+i=0$.

1.19. $(2i-5)z-i-3=0$.

1.20. $(i+2)z-3i+1=0$.

1.21. $z^2-25=0$.

1.22. $z^2-9=0$.

1.23. $z^2+16=0$.

1.24. $z^2+4=0$.

1.25. $z^3+8=0$.

1.26. $z^3+27=0$.

1.27. $z^2+9i=0$.

1.28. $z^2+49i=0$.

1.29. $z^4+1=0$.

1.30. $z^3+1=0$.

1.31. $z^3-i=0$.

1.32. $z^4+i=0$.

1.33. $z^2-2z+2=0.$ **1.34.** $z^2+4z+5=0.$
1.35. $z^2+2z+5=0.$ **1.36.** $z^2-2z+10=0.$
1.37. $z^2-z+3=0.$ **1.38.** $z^2+z+2=0.$

Найти корни уравнения, лежащие в заданной области. Изобразить эту область и корни.
1.39. $z^2+zi=0,\ |z|\leq 2.$ **1.40.** $z^2-2iz=0,\ |z|\geq 1.$
1.41. $e^{-2z}-1=0,\ |z|\geq 3.$ **1.42.** $e^{2z}+1=0,\ |z|\leq 2.$
1.43. $e^{-z}+i=0,\ 1\leq|z|\leq 6.$ **1.44.** $e^{4z}-i=0,\ 2\leq|z|\leq 4.$

2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Найти действительную и мнимую части функции.
2.1. $i+z.$ **2.2.** $1+iz.$
2.3. $e^{-2z}.$ **2.4.** $e^{4z}.$
2.5. $z+3iz^2.$ **2.6.** $2iz+z^2.$
2.7. $e^z+2\sin z.$ **2.8.** $e^{-z}+2\cos z.$
2.9. $e^{-iz}+\mathrm{ch}z.$ **2.10.** $e^{iz}+\mathrm{sh}z.$

Определить, является ли функция многозначной, выписать формулы для всех ее значений.
2.11. $z^3-2z^2.$ **2.12.** $iz^3+z^2+1.$
2.13. $\arg(2z).$ **2.14.** $\ln(i-3z).$
2.15. $\arg(iz).$ **2.16.** $\ln(iz).$
2.17. $3^z.$ **2.18.** $e^{4z}.$
2.19. $e^{-z}.$ **2.20.** $5^z.$
2.21. $\sqrt{z^2+1}.$ **2.22.** $\sqrt{z+1}.$

Найти область аналитичности функции (проверить аналитичность). Найти производную там, где она существует.
2.23. $e^{-z}.$ **2.24.** $e^{2z}.$
2.25. $(3iz)^{-2}.$ **2.26.** $(-iz)^{-3}.$
2.27. $\sin z-i.$ **2.28.** $1+\cos z.$

2.29. $z \cdot e^{-iz}$.

2.30. $z \cdot e^{2iz}$.

2.31. $i\bar{z}$.

2.32. $3\bar{z}$.

2.33. $|z| + 2i - z$.

2.34. $|2z| + i + z$.

2.35. $\mathrm{Re}\left(z \cdot \overline{2z}\right)$.

2.36. $\mathrm{Im}(2z \cdot \bar{z})$.

Записать разложение функции в ряд Лорана в окрестности точки.

2.37. $w = \dfrac{1}{1+2z}$, а) $z=0$; б) $z=-5$; в) $z=2i-5$.

2.38. $w = \dfrac{1}{1-3z}$, а) $z=0$; б) $z=1$; в) $z=3i-5$.

2.39. $w = \dfrac{1}{(1-2z)z}$, а) $z=0$; б) $z=-5$.

2.40. $w = \dfrac{1}{(1+3z)z}$, а) $z=0$; б) $z=1$.

Записать разложение функции в ряд Лорана во всех кольцах аналитичности.

2.41. $w = \dfrac{1}{2+z}$.

2.42. $w = \dfrac{1}{3-z}$.

2.43. $w = \dfrac{1}{(4+z)z}$.

2.44. $w = \dfrac{1}{(2-z)z}$.

2.45. $w = \dfrac{1}{(1+z)(2z-1)}$.

2.46. $w = \dfrac{1}{(1-z)(z+5)}$.

2.47. $w = \exp\dfrac{1}{(2-z)}$.

2.48. $w = \exp\dfrac{1}{(1+z)}$.

2.49. $w = \cos\dfrac{1}{(i+z)}$.

2.50. $w = \sin\dfrac{1}{(i-z)}$.

Найти особые точки, определить их тип, найти вычеты.

2.51. $\dfrac{\sin z}{z}$.

2.52. $\dfrac{\cos z}{z}$.

2.53. $\dfrac{1}{(z+2i-7)^2}$.

2.54. $\dfrac{1}{(z-2-7i)^3}$.

2.55. $\dfrac{e^z - 1}{z}$.

2.56. $\dfrac{1-e^{-z}}{z}$.

2.57. $\dfrac{1-\cos z}{z^2}$.

2.58. $\dfrac{1-\cos 3z}{z}$.

2.59. $\dfrac{z^2}{\sin z}$.

2.60. $\dfrac{z}{\sin(7z)}$.

2.61. $\exp\dfrac{1}{4z}$.

2.62. $\cos\dfrac{2}{z}$.

2.63. $z^2 e^{\frac{1}{z+1}}$.

2.64. $z^2 \sin\left(\dfrac{1}{z-1}\right)$.

2.65. $z^3 \cos\left(\dfrac{-i}{z}\right)$.

2.66. $z^3 \exp\left(\dfrac{i}{z}\right)$.

2.67. $\dfrac{e^{3z}}{z(z-1)}$.

2.68. $\dfrac{e^{-z}}{z(z+1)}$.

2.69. $\dfrac{e^{z}}{z^2(z-1)}$.

2.70. $\dfrac{e^{2z}}{z(z-1)^2}$.

Найти все нули и все особые точки функции, определить порядок, тип.

2.71. $\dfrac{\pi\cos z}{z(z-\pi)}$.

2.72. $\dfrac{2\pi\sin z}{z(2z+\pi)}$.

2.73. $z^2(z-1)\cdot\sin\dfrac{1}{z^2+z}$.

2.74. $(z-1)^2\cdot(z+2)\cdot\cos\dfrac{1}{z^2+2z}$.

2.75. $\dfrac{\operatorname{ch}(z)+2}{z^3+2}$.

2.76. $\dfrac{\operatorname{sh}(z)+4}{z^4+4}$.

2.77. $\dfrac{\exp(z^2)-1}{\ln(z+1)}$.

2.78. $\dfrac{\exp(4z^2)-e^4}{\sin(z-1)}$.

Разложить функцию в ряд по степеням $(z-z_0)$. Используя полученное разложение, найти вторую и пятую производные в указанных точках. Вычислить эти же производные повторным дифференцированием.

2.79. $w=(-1+z)\exp(z-2)$,

если: а) $z_0=0$; б) $z_0=-1$; в) $z_0=2i-5$.

2.80. $w=(-3+z)\exp(z-4)$,
если: а) $z_0=0$; б) $z_0=-1$; в) $z_0=2i-5$.

2.81. $w=(1+z)\cdot\sin\left(z-\dfrac{\pi}{3}\right)$,

если: а) $z_0=0$; б) $z_0=-\pi$; в) $z_0=\pi(2i-5)$.

2.82. $w=(1+z)\cdot\sin\left(z-\dfrac{\pi}{3}\right)$,

если: а) $z_0=0$; б) $z_0=-\pi$; в) $z_0=\pi(2i-5)$.

3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Вычислить интеграл. Полученное число изобразить на комплексной плоскости. Найти его модуль.

3.1. $\int\limits_0^{1+2i}(z-4i)dz$.

3.2. $\int\limits_0^{1-i}(3i-z)dz$.

3.3. $\int\limits_{i-8}^{i}(z+1)dz$.

3.4. $\int\limits_{i}^{3+i}(z-1)dz$.

3.5. $\int\limits_1^{-i}e^z dz$.

3.6. $\int\limits_{-1}^{i}e^z dz$.

3.7. $\int\limits_{-1}^{2-i}e^{-3z}dz$.

3.8. $\int\limits_1^{2+2i}e^{2z}dz$.

3.9. $\int\limits_0^{2\pi}(z+i)\sin z\,dz$.

3.10. $\int\limits_0^{2\pi}(z-3i)\cos z\,dz$.

Вычислить $\int\limits_{L_{AB}}f(z)dz$ от функции, изобразить контур интегрирования.

3.11. $f(z)=z\sin z$; если $L_{AB}:\begin{cases}x=t-1,\\ y=t+1\end{cases}$ от точки A при $t_A=0$

до точки B при $t_B=-2$.

3.12. $f(z)=z\cos z$; если $L_{AB}:\begin{cases}x=t+1,\\ y=t-1\end{cases}$ от точки A при $t_A=0$

до точки B при $t_B=-2$.

3.13. $f(z)=ze^{2z}$; если $L_{AB}:\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t\end{cases}$ от точки A при $t_A=0$ до точки B при $t_B=2\pi$.

3.14. $f(z)=ze^{-3z}$; если $L_{AB}:\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t\end{cases}$ от точки A при $t_A=0$ до точки B при $t_B=\pi$.

3.15. $f(z)=(z+2)(3z-i)$; если L_{AB}: $y=2-x$ от точки A при $x_A=0$ до точки B при $x_B=2$.

3.16. $f(z)=(z-1)(2z+i)$; если L_{AB}: $y=1-x$ от точки A при $x_A=0$ до точки B при $x_B=1$.

3.17. $f(z)=(z-2)(z-i)$; если L_{AB}: $y=x^2$ от точки A при $x_A=0$ до точки B при $x_B=2$.

3.18. $f(z)=(z+1)(z+3i)$; если L_{AB}: $y=x^2$ от точки A при $x_A=0$ до точки B при $x_B=1$.

3.19. $f(z)=\overline{z^2}\cdot\mathrm{Re}(-z)$; если $L_{AB}:\begin{cases}x=2t+1,\\ y=t\end{cases}$ от точки A при $t_A=-3$ до точки B при $t_B=1$.

3.20. $f(z)=\mathrm{Re}(z^2-3z)\cdot\mathrm{Im}(\overline{z})$; если $L_{AB}:\begin{cases}x=t,\\ y=1-2t\end{cases}$ от точки A при $t_A=-1$ до точки B при $t_B=3$.

3.21. $f(z)=\mathrm{Im}(2z-z^2)\cdot\mathrm{Re}(\overline{z})$; если $L_{AB}:\begin{cases}x=2t,\\ y=1+t\end{cases}$ от точки A при $t_A=0$ до точки B при $t_B=4$.

3.22. $f(z)=(\overline{z})^2\cdot\mathrm{Im}(z)$; если $L_{AB}:\begin{cases}x=t+1,\\ y=-t\end{cases}$ от точки A при $t_A=0$ до точки B при $t_B=2$.

Вычислить интеграл, используя теорему Коши.

3.23. $\oint\limits_{|z-2|=3}\dfrac{z^2-2}{z}dz.$

3.24. $\oint\limits_{|z+3i|=5}\dfrac{z^2-1}{z}dz.$

3.25. $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{z-1}{\pi iz}dz.$

3.26. $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{z+1}{2\pi iz}dz.$

3.27. $\oint\limits_{|z-3|=1} \frac{z^2-2}{z}dz.$

3.28. $\oint\limits_{|z+3|=1} \frac{z^2-10}{2z}dz.$

3.29. $\int\limits_{|z+i|=2} \frac{z^3-2z^2-2}{z}dz.$

3.30. $\int\limits_{|z|=3} \frac{3z^3-z^2-2}{z^4}dz.$

3.31. $\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{z(z-1)}dz.$

3.32. $\int\limits_{|z|=4} \frac{e^z-1}{z(z+1)}dz.$

3.33. $\int\limits_{|z-2i|=2} \frac{\exp(z+6)}{(z-i)^3}dz.$

3.34. $\int\limits_{|z+i|=3} \frac{\ln(z+6)}{(z-i)^2}dz.$

Вычислить интегралы функции действительного переменного, используя функции комплексного переменного.

3.35. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x-3}{(x^2+4)^2}dx.$

3.36. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{(x^2+1)^2}dx.$

3.37. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+25)^2}dx.$

3.38. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2}dx.$

3.39. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2(x^2+16)}.$

3.40. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+25)}.$

3.41. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2}dx.$

3.42. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+9)^2}dx.$

3.43. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\sin x}{(x^2+9)^2}dx.$

3.44. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{(x+2)\sin 3x}{(x^2+4)^2}dx.$

3.45. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{21}\sin x+5}.$

3.46. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{15}\sin x+2}.$

3.47. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{5+2\sqrt{6}\sin x}.$

3.48. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{2+\sqrt{3}\sin x}$

3.49. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{\left(\sqrt{5}+\cos x\right)^2}.$

3.50. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{\left(\sqrt{7}+\cos x\right)^2}.$

3.51. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{\left(2\sqrt{3}+\sqrt{11}\cos x\right)^2}.$

3.52. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\cos x\right)^2}.$

XI. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1. ОРИГИНАЛЫ И ИЗОБРАЖЕНИЯ

Найти изображения для оригиналов двумя способами: по определению и по таблице.

1.1. $7t+3$.
1.2. $3-5t$.
1.3. $\mathrm{ch}2t$.
1.4. $\mathrm{sh}2t$.
1.5. $e^{2t}\mathrm{ch}3t$.
1.6. $e^{-2t}\mathrm{sh}5t$.
1.7. t^2-6t.
1.8. $2t^2+t$.
1.9. te^{-3t}.
1.10. te^{2t}.
1.11. $e^{-t}\sin 2t$.
1.12. $e^{3t}\cos t$.
1.13. $e^{-2t}t^2$.
1.14. $e^{5t}t^2$.

Найти оригиналы для изображений.

1.15. $\dfrac{1}{p^2+9}$.
1.16. $\dfrac{p}{p^2-4}$.
1.17. $\dfrac{p}{p^2+25}$.
1.18. $\dfrac{1}{p^2-16}$.
1.19. $\dfrac{e^{-2p}}{p^2+4}$.
1.20. $\dfrac{e^{3p}}{p^2+9}$.
1.21. $\dfrac{1}{(p+2)^2-9}$.
1.22. $\dfrac{1}{(p-2)^2+4}$
1.23. $\dfrac{p-2}{(p-2)^2-4}$
1.24. $\dfrac{p+3}{(p+3)^2+9}$.
1.25. $\dfrac{e^{-2p}}{(p-2)^2+1}$.
1.26. $\dfrac{e^{-2p}}{(p-1)^2-4}$.
1.27. $\dfrac{p}{(1-p)(p+2)}$.
1.28. $\dfrac{p}{(1+p)(p-4)}$.
1.29. $\dfrac{1}{p(p-2)}$.
1.30. $\dfrac{1}{(p-3)(p+2)}$.
1.31. $\dfrac{p+1}{p^2-4p+2}$.
1.32. $\dfrac{p+2}{p^2-2p-2}$.
1.33. $\dfrac{2p+1}{p^2+2p+2}$.
1.34. $\dfrac{3p+1}{p^2+p+2}$.

1.35. $\dfrac{p^2+3p-2}{(p^2+1)(p^2-16)}$. **1.36.** $\dfrac{p-1}{(p+2)^2(p^3-8)}$.

1.37. $\dfrac{2p-5}{(p-6)^2(p^3-1)}$. **1.38.** $\dfrac{p^2+p-1}{(p+2)^2(p^4-81)}$.

1.39. $\dfrac{p^2-1}{p^2(p^4-16)}$. **1.40.** $\dfrac{p^3-1}{p^2(p^4-625)}$.

2. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

Решить задачу Коши операционным методом, сделать проверку.

2.1. $\begin{cases} y'=y, \\ y(0)=2. \end{cases}$ **2.2.** $\begin{cases} 2y'=y, \\ y(0)=5. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} -3y'=y, \\ y(0)=1. \end{cases}$ **2.4.** $\begin{cases} y'=-8y, \\ y(0)=4. \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} y'=4y, \\ y(0)=-2. \end{cases}$ **2.6.** $\begin{cases} y'=-2y, \\ y(0)=2. \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} 2x'+x=1, \\ x(0)=-3. \end{cases}$ **2.8.** $\begin{cases} x'-3x=1, \\ x(0)=2. \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} x'-x=e^{2t}+5\sin t, \\ x(0)=0. \end{cases}$ **2.10.** $\begin{cases} x'+x=e^{-4t}+2\cos t, \\ x(0)=0. \end{cases}$

2.11. $\begin{cases} x''-2x'+x=0, \\ x'(0)=-2, \\ x(0)=1. \end{cases}$ **2.12.** $\begin{cases} x''+2x'+x=0, \\ x'(0)=2, \\ x(0)=-1. \end{cases}$

2.13. $\begin{cases} x''+x'-6x=0, \\ x'(0)=-2, \\ x(0)=0. \end{cases}$ **2.14.** $\begin{cases} x''-2x'-8x=0, \\ x'(0)=0, \\ x(0)=-1. \end{cases}$

2.15. $\begin{cases} x''-2x'+x=0, \\ x'(0)=-2, \\ x(0)=-1. \end{cases}$ **2.16.** $\begin{cases} x''+2x'+x=0, \\ x'(0)=-1, \\ x(0)=0. \end{cases}$

2.17. $\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^t + 2t^2, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$

2.18. $\begin{cases} y'' + 4y = e^t \sin t, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$

2.19. $\begin{cases} y'' + y' = e^{-t}, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = -1. \end{cases}$

2.20. $\begin{cases} y'' + 9y = 36e^{3t}, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 6. \end{cases}$

2.21. $\begin{cases} y''' + y' = \cos 2t + 1, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1, \\ y''(0) = -1. \end{cases}$

2.22. $\begin{cases} y''' - y' = \sin 4t - 3, \\ y(0) = -1, \\ y'(0) = 1, \\ y''(0) = 0. \end{cases}$

Решить операционным методом задачу Коши для системы дифференциальных уравнений, сделать проверку.

2.23. $\begin{cases} x' - 3y = \sin t, \\ 2y' + x = 0, \\ x(0) = 1, \\ y(0) = -4. \end{cases}$

2.24. $\begin{cases} 2x' - 2y = \cos 2t, \\ 2y' + x' = 2, \\ x(0) = 1, \\ y(0) = -4. \end{cases}$

2.25. $\begin{cases} x' - 3y = \sin t + \sin 2t, \\ y' + x = 0, \\ x(0) = 0, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

2.26. $\begin{cases} x' - 3y = \sin 4t + 1, \\ 3x - y' = 0, \\ x(0) = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

2.27. $\begin{cases} x - y' = t - 2, \\ y' + x' = e^t, \\ x(0) = 0, \\ y(0) = 4. \end{cases}$

2.28. $\begin{cases} x' + 3y' = e^{-t}, \\ y' + x = 1, \\ x(0) = 2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

XII. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

1.1. В каждом из случаев определить, что является опытом (экспериментом), что — исходом (элементарным событием), а что — случайным событием?

а) При броске игрального кубика сверху оказалось четное число;

б) при двух бросках игрального кубика сумма выпавших чисел была больше трех;

в) стрелок стреляет по мишени, разделенной на четыре области, и промахивается.

1.2. В каждом из случаев определить, что является опытом (экспериментом), что — исходом (элементарным событием), а что — событием?

а) Из колоды вынули три карты, все они одной масти;

б) из коробки вынули три кусочка плотной бумаги, не все они оказались игральными картами;

в) два стрелка одновременно стреляют по мишени и подсчитывают общее число очков.

1.3. Являются ли несовместными события A и B:

а) при подбрасывании монеты: A — «появление герба», B — «появление цифры»;

б) при двух выстрелах по мишени: A — «хотя бы одно попадание», B — «хотя бы один промах»?

1.4. Являются ли несовместными события A и B:

а) при подбрасывании кубика: A — «на верхней грани — четное число точек», B — «на нижней грани — нечетное число точек»;

б) при трех выстрелах по мишени: A — «хотя бы два попадания», B — «два промаха»?

1.5. Являются ли равновозможными события A и B:

а) при подбрасывании симметричной монеты: A — «появление герба», B — «появление цифры»;

б) при подбрасывании погнутой монеты: A — «появление герба», B — «появление цифры»;

в) при одном выстреле по мишени: A — «попадание в десятку», B — «промах»?

1.6. Являются ли равновозможными события A и B:

а) при подбрасывании несимметричной монеты: A — «появление герба», B — «появление цифры»;

б) при подбрасывании симметричной идеальной монеты: A — «монета легла плашмя», B — «монета встала на ребро»;

в) при выстреле по мишени: A — «попадание», B — «промах»?

1.7. В каждом указанном опыте описать элементарные исходы, указать, какие исходы можно считать равновозможными.

а) Из магнитной азбуки красного цвета случайным образом вынули букву и приставили ее к букве, случайным образом вынутой из магнитной азбуки синего цвета (при условии, что в каждой азбуке все буквы разные).

б) Из магнитной азбуки красного цвета случайным образом вынули букву и приставили ее к букве, случайным образом вынутой из магнитной азбуки синего цвета (при условии, что в каждой азбуке есть дублирующиеся буквы).

в) Смешали две одинаковые магнитные азбуки и случайным образом вынули две буквы.

1.8. В каждом указанном опыте описать элементарные исходы, указать, какие исходы можно считать равновозможными.

а) Из коробки домино случайным образом вынимаются две кости, подсчитывается сумма очков;

б) из цепочки домино случайным образом вынимаются две последовательно лежащие кости, подсчитывается сумма очков;

в) бросается два одинаковых игральных кубика, подсчитывается сумма очков.

1.9. Описать некоторые ситуации (условия проведения опыта), в которых события A и $\bar{A}$ равновозможны и неравновозможны. Событие A: а) получить цифру 0; б) увидеть мамонта; в) взять бракованную деталь; г) получить удовлетворительную оценку.

1.10. Описать некоторые ситуации (условия проведения опыта), в которых события A и $\bar{A}$ равновозможны и неравновозможны. Событие A: а) взять зеленый карандаш; б) получить четное число; в) поймать птеродактиля; г) получить приз.

1.11. Записать полную группу событий в опыте: подбрасывают два игральных кубика и подсчитывают сумму выпавших очков на верхних гранях кубиков.

1.12. Записать полную группу событий в опыте: подсчитывают сумму очков на двух картах, случайным образом выбранных из набора, состоящего из карт всех мастей достоинством от 6 до 10.

1.13. Образуют ли полную группу событий события A и B:

а) при одном выстреле: A — «промах», B — «попадание»;

б) при двух выстрелах: A — «промах», B — «попадание»?

1.14. Образуют ли полную группу событий события A и B:

а) при подбрасывании симметричной идеальной монеты: A — «герб», B — «цифра»;

б) при подбрасывании двух идеальных симметричных монет: A — «два герба», B — «две цифры»?

1.15. Какому событию при подбрасывании трех игральных кубиков благоприятствует больше элементарных исходов: «сумма выпавших очков равна 8», «сумма выпавших очков равна 11»?

1.16. Какому событию при сложении цифр двузначного числа благоприятствует больше элементарных исходов: «сумма цифр больше 9», «сумма цифр меньше 11»?

1.17. Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал ее произвольно. Какова вероятность того, что набрана нужная цифра?

1.18. Код устройства состоит из одного символа, в качестве которого используют три цифры и два знака. Какова вероятность того, что код можно угадать с первого раза, с пятого раза?

1.19. Одновременно бросают две идеальные монеты. Найти вероятность того, что выпадет два «герба», хотя бы один «герб».

1.20. Одновременно бросают две идеальные монеты. Найти вероятность того, что выпадет «герб» и цифра, две цифры.

1.21. Вероятность того, что день будет дождливым, равна 0,7. Найти вероятность того, что день будет без дождя.

1.22. Вероятность того, что днем выпадет снег, равна 0,1. Найти вероятность того, что снег днем не выпадет.

1.23. В денежно-вещевой лотерее на каждые 1000 билетов разыгрывается 10 вещевых и 50 денежных выигрышей. Чему равна вероятность выигрыша для владельца одного лотерейного билета?

1.24. В лотерее на каждые 2000 билетов разыгрывается 100 мелких и 20 крупных денежных выигрышей. Чему равна вероятность выигрыша для владельца одного лотерейного билета?

1.25. Все натуральные числа от 1 до 30 записаны на одинаковых карточках и помещены в урну. После тщательного перемешивания карточек из урны извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что число на взятой карточке окажется кратным 4?

1.26. Все натуральные числа от 5 до 40 записаны на одинаковых карточках и помещены в урну. После тщательного перемешивания карточек из урны извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что число на взятой карточке окажется кратным 5?

1.27. В урне 8 красных и 6 синих шаров, из урны извлекается один шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар окажется красным?

1.28. В урне 12 фальшивых и 68 настоящих купюр, из урны извлекается одна купюра. Какова вероятность того, что извлеченная купюра окажется фальшивой?

1.29. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 40. Какова вероятность того, что это число является простым?

1.30. Наудачу выбрано натуральное двузначное число. Какова вероятность того, что это число является простым?

1.31. Какова вероятность того, что в наудачу выбранном двузначном числе цифры одинаковы?

1.32. Какова вероятность того, что в наудачу выбранном двузначном числе первая цифра меньше второй?

1.33. Из букв слова «эквивалентность» наугад выбирается одна буква. Какова вероятность того, что эта буква будет: а) гласной, б) согласной, в) ни гласной, ни согласной?

1.34. Из букв слова «сертификация» наугад выбирается одна буква. Какова вероятность того, что эта буква будет: а) гласной, б) согласной, в) ни гласной, ни согласной?

1.35. В книге 133 страницы. Чему равна вероятность того, что наугад открытая страница будет иметь четный порядковый номер?

1.36. В книге 271 страница. Чему равна вероятность того, что наугад открытая страница будет иметь порядковый номер, кратный 10?

1.37. Подбрасывают три игральных кубика, подсчитывают сумму очков на верхних гранях. Что вероятнее — получить в сумме 9 или 10 очков?

1.38. Подбрасывают три игральных кубика, подсчитывают сумму выпавших очков. Что вероятнее — получить в сумме 11 или 12 очков?

1.39. Какова вероятность того, что наудачу взятую кость домино можно приставить к кости (1; 5)?

1.40. Какова вероятность того, что наудачу взятую кость домино можно приставить к кости (3; 0)?

1.41. Из тщательно перемешанного полного набора 28 костей домино наудачу выбрана кость. Найти вероятность того, что вторую наудачу выбранную кость можно приставить к первой, если первая кость оказалась дублем.

1.42. Из тщательно перемешанного полного набора 28 костей домино наудачу выбрана кость. Найти вероятность того, что вторую наудачу выбранную кость можно приставить к первой, если первая кость не дубль.

1.43. В коробке 500 карандашей, из них 60 черных. Наудачу вынимают один карандаш. Найти вероятность того, что выбранный карандаш не окажется черным.

1.44. В ящике 120 ложек, из них 85 стальных. Наудачу вынимают одну ложку. Найти вероятность того, что выбранная ложка не окажется стальной.

1.45. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу выбранного жетона не содержит цифры 5.

1.46. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу выбранного жетона не содержит цифры 0.

1.47. Деревянный куб, все грани которого окрашены, распилен на 27 кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу выбранный кубик будет иметь окрашенных граней: а) одну; б) три.

1.48. Деревянный куб, все грани которого окрашены, распилен на 64 кубика одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу выбранный кубик будет иметь окрашенных граней: а) одну; б) две.

1.49. В коробке находилось n деталей, среди которых 6 дефектных. Проведено два опыта. В первом случайным образом одна за другой выбраны 2 детали. Во втором — сначала отложена 1 годная деталь, а затем случайным образом одна за другой выбраны 2 детали. Можно ли считать практически равновозможными события: A — «первая вынутая деталь дефектная» и B — «вторая вынутая деталь дефектная»? В каждом опыте рассмотреть случаи: а) $n=10$; б) $n=3000$.

1.50. В коробке находилось n деталей, среди которых 3 дефектных. Проведено два опыта. В первом случайным образом одна за другой выбраны 2 детали. Во втором — сначала отложена 1 дефектная, а затем случайным образом одна за другой выбраны 2 детали. Можно ли считать практически равновозможными события: A — «первая вынутая деталь годная» и B — «вторая вынутая деталь годная»? В каждом опыте рассмотреть случаи: а) $n = 11$; б) $n = 5000$.

2. КОМБИНАТОРИКА И ВЕРОЯТНОСТЬ

2.1. Сколькими различными способами можно выбрать 4 лица на 4 различные должности из 15 кандидатов?

2.2. Сколькими различными способами можно выбрать 3 лица на 3 различные должности из 9 кандидатов?

2.3. Сколькими способами можно выбрать 3 лица на 3 одинаковые должности из 25 кандидатов?

2.4. Сколькими способами можно выбрать 2 лица на 2 одинаковые должности из 12 кандидатов?

2.5. Сколькими различными способами могут разместиться на скамейке 5 человек?

2.6. Сколькими различными способами могут разместиться в коробке 7 карандашей разного цвета?

2.7. Сколько различных шестизначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 2, 3, 3, 3?

2.8. Сколько различных шестизначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 0, 1, 2, 2, 2?

2.9. Сколько различных формальных слов можно получить, переставляя буквы слов: мир, садок, корова?

2.10. Сколько различных формальных слов можно получить, переставляя буквы слов: бит, ротор, ледокол?

2.11. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 4, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

2.12. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

2.13. Сколько можно составить различных сигналов из 3 флажков, если в наличии есть 8 флажков разного цвета?

2.14. Сколько разных букетов из 5 цветков можно составить, если в наличии есть 7 различных цветков?

2.15. В партии из 15 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди 6 взятых наудачу деталей окажется 4 стандартных.

2.16. В партии из 12 деталей 9 стандартных. Найти вероятность того, что среди 4 взятых наудачу деталей окажется 3 стандартных.

2.17. В теннисном турнире участвуют 11 мужчин и 5 женщин. Сколькими способами можно составить 4 смешанные команды по 2 человека в каждой?

2.18. В кадровом агентстве на учете находятся 7 специалистов со стажем работы и 9 специалистов без стажа. Сколькими способами можно составить 5 бригад работников так, чтобы в каждой бригаде было 2 специалиста без стажа и 1 со стажем?

2.19. Игральная кость бросается 3 раза. Найти вероятность того, что на верхней грани в первый раз выпадет 5 очков, во второй раз — 6 очков, а в третий раз — 2 очка.

2.20. Игральная кость бросается 5 раз. Найти вероятность того, что на верхней грани каждый раз будет выпадать 6 очков.

2.21. В урне 5 белых и 2 черных шара. Из урны сразу вынимаются 2 шара. Найти вероятность того, что шары будут разных цветов.

2.22. В урне 2 белых и 9 черных шаров. Из урны сразу вынимаются 2 шара. Найти вероятность того, что шары будут разных цветов.

2.23. На трех карточках написаны буквы «М», «О», «Д». Карточки перемешаны и случайным образом подкладываются одна к другой. Какова вероятность, что получится слово «ДОМ»?

2.24. На 3 карточках написаны буквы «М», «Р», «И». Карточки перемешаны и случайным образом подкладываются одна к другой. Какова вероятность, что получится слово «МИР»?

2.25. На доске из букв магнитной азбуки составили слово «ЗОЛОТО», затем буквы сняли с доски, перемешали и стали снова выкладывать в произвольном порядке. Какова вероятность того, что снова получится слово «ЗОЛОТО»?

2.26. На доске из букв магнитной азбуки составили слово «СЕРЕБРО», затем буквы сняли с доски, перемешали и стали снова выкладывать в произвольном порядке. Какова вероятность того, что снова получится слово «СЕРЕБРО»?

2.27. Какова вероятность, вытягивая из колоды в 52 карты 6 карт, вытянуть 4 дамы и 2 короля?

2.28. Какова вероятность, вытягивая из колоды в 36 карт 4 карты, вытянуть 2 дамы и 2 туза?

2.29. В партии из 23 деталей находятся 19 стандартных. Найти вероятность того, что среди 6 взятых наудачу деталей будет 4 стандартных.

2.30. В группе из 25 студентов учатся 10 девушек. Найти вероятность того, что среди обладателей 7 разыгрываемых билетов окажутся 3 девушки.

2.31. В ящике находятся 16 красных, 7 синих и 6 зеленых шаров. Наудачу вынимают 8 шаров. Какова вероятность того, что вынуты: 3 зеленых, 2 синих и 3 красных шара?

2.32. В коробке находятся 29 красных, 33 белых и 18 синих скрепок. Наудачу вынимают 25 скрепок. Какова вероятность того, что вынуты: 15 красных, 5 белых и 5 синих скрепок?

2.33. Игральный кубик подбрасывают 10 раз. Какова вероятность того, что при этом грани 1, 2, 3, 4, 5, 6 выпадут соответственно 2, 3, 1, 1, 1, 2 раза?

2.34. Игральный кубик подбрасывают 8 раз. Какова вероятность того, что при этом грани 1, 2, 3, 4, 5, 6 выпадут соответственно 1, 3, 1, 0, 1, 2 раза?

2.35. Множество M содержит только 7 первых букв русского алфавита. Сколько различных формальных алфавитов из 4 букв можно составить из данного множества букв? Какова вероятность того, что случайно выбранный алфавит будет содержать букву «Г»?

2.36. Множество M содержит только 9 первых букв русского алфавита. Сколько различных формальных алфавитов из 4 букв можно составить из данного множества букв? Какова вероятность того, что случайно выбранный алфавит будет содержать букву «З»?

2.37. В урне 18 белых и 9 черных шаров. Вынули подряд 4 шара, причем каждый вынутый шар возвращали в урну перед извлечением следующего и шары в урне перемешивали. Какова вероятность того, что среди 4 вынутых шаров оказалось 2 белых?

2.38. В урне 11 белых и 11 черных шаров. Вынули подряд 6 шаров, причем каждый вынутый шар возвращали в урну перед извлечением следующего и шары в урне перемешивали. Какова вероятность того, что из 6 вынутых шаров все были белыми?

2.39. В первом ящике 2 белых, 2 красных и 5 синих шаров; во втором — 2 белых, 6 красных, 4 синих шара. Из каждого ящика вынули по шару. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров нет синих.

2.40. В первой коробке 1 желтый, 2 красных и 3 синих карандаша; во второй — 2 зеленых, 2 красных, 4 фиолетовых карандаша. Из каждой коробки вынули по одному карандашу. Найти вероятность того, что среди вынутых карандашей нет красных.

2.41. Из партии, в которой 25 изделий, в том числе 6 бракованных, случайным образом выбрали 3 изделия для проверки качества. Найти вероятность того, что: а) все изделия годные; б) среди выбранных изделий только одно бракованное; в) все изделия бракованные.

2.42. Из стопки книг, в которой 26 на русском языке и 18 на английском, случайным образом выбрали 4 книги. Найти вероятность того, что: а) все книги на русском языке; б) среди выбранных книг только одна на английском языке; в) все книги на английском языке.

2.43. 8 различных книг случайным образом расставляют на одной полке. Найти вероятность того, что 2 определенные книги будут поставлены рядом.

2.44. 5 различных книг случайным образом расставляют на одной полке. Найти вероятность того, что 2 определенные книги будут поставлены рядом.

2.45. Числа 1, 2, ..., 17 расположены одно за другим в случайном порядке без разделителей, образуя одно многозначное число. Найти вероятность того, что 3 подряд стоящие цифры нового числа образуют число 115.

2.46. Числа 1, 2, ..., 13 расположены одно за другим в случайном порядке без разделителей, образуя одно многозначное число. Найти вероятность того, что 3 подряд стоящие цифры нового числа образуют число 122.

3. ЧАСТОТА СОБЫТИЯ. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

3.1. Отдел технического контроля обнаружил 3 нестандартные детали в партии из 80 случайно отобранных деталей. Найти относительную частоту появления нестандартных деталей.

3.2. По цели произвели 24 выстрела, причем было зарегистрировано 19 попаданий. Найти относительную частоту поражения цели.

3.3. На отрезке натурального ряда от 1 до 20 найти частоту простых чисел.

3.4. На отрезке натурального ряда от 21 до 40 найти частоту простых чисел.

3.5. Найти частоту появления решки при 50 подбрасываниях монеты. (Опыт провести самостоятельно.)

3.6. Найти частоту появления шестерки при 40 подбрасываниях игрального кубика. (Опыт провести самостоятельно.)

3.7. Среди 1000 новорожденных оказалось 515 мальчиков. Какова частота рождения мальчиков?

3.8. Из 500 взятых наудачу деталей оказалось 8 бракованных. Найти частоту бракованных деталей.

3.9. По данным статистики, относительная частота рождения девочек за год по месяцам характеризуется следующими числами: 0,486; 0,489; 0,490; 0,471; 0,478; 0,482; 0,462; 0,484; 0,485; 0,491; 0,482; 0,473. Каково приближенное значение вероятности рождения девочек?

3.10. По данным статистики, относительная частота рождения мальчиков за год по месяцам характеризуется следующими числами: 0,512; 0,501; 0,527; 0,506; 0,516; 0,503; 0,511; 0,532; 0,505; 0,511; 0,507; 0,527. Каково приблизительное значение вероятности рождения мальчиков.

3.11. Многократно проводились опыты бросания монеты, в которых подсчитывали число появления «герба».

Число бросаний	Число появлений «герба»
11 000	5573
18 000	8989
25 000	12 302

Каково приближенное значение вероятности появления «решки»?

3.12. Многократно проводились опыты бросания монеты, в которых подсчитывали число появления «герба».

Число бросаний	Число появлений «герба»
4040	2048
12 000	6019
24 000	12 012

Каково приближенное значение вероятности появления «герба»?

3.13. При стрельбе по мишени частота попаданий равна 0,75. Найти число попаданий при 40 выстрелах.

3.14. При сортировке сливы гнилые плоды попадаются с частотой 0,15. Найти вес хорошей сливы после сортировки 200 кг слив.

3.15. Частота нормального всхода семян равна 0,97. Из высеянных семян взошло 970. Сколько семян было высеяно?

3.16. Частота нормальной приживаемости черенков равна 0,83. Из посаженных черенков засохло 12 штук. Сколько черенков было высажено?

3.17. Контролер, проверяя качество 350 изделий, установил, что 20 из них относятся ко второму сорту, а остальные — к первому. Найти частоту изделий первого сорта и частоту изделий второго сорта.

3.18. Автомат, проверяя размеры 845 клубней картофеля, установил, что 763 из них относятся к первому сорту, а остальные — ко второму. Найти частоту клубней первого сорта и частоту клубней второго сорта.

3.19. При стрельбе из винтовки относительная частота попадания в цель оказалась равной 0,85. Найти число попаданий, если всего было произведено 120 выстрелов.

3.20. При стрельбе из лука относительная частота попадания в цель оказалась равной 0,67. Найти число попаданий, если всего было произведено 100 выстрелов.

4. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

4.1. На отрезок OA длиной 12 см наудачу поставлена точка $B(x)$. Найти вероятность того, что меньший из отрезков OB и BA имеет длину больше 4 см.

4.2. На отрезок OA длиной 10 см наудачу поставлена точка $B(x)$. Найти вероятность того, что больший из отрезков OB и BA имеет длину больше 7 см.

4.3. На отрезке [0; 3] наудачу выбраны 2 числа x и y так, что $y \geq x$. Найти вероятность того, что эти числа удовлетворяют неравенствам $x^2 \leq 4y \leq 4x$.

4.4. На отрезке [1; 2] наудачу выбраны 2 числа x и y так, что $x \geq y$. Найти вероятность того, что эти числа удовлетворяют неравенствам $4x \leq y \leq 4x^2$.

4.5. На отрезок единичной длины ставят наудачу 2 точки. Они разбивают отрезок на 3 части. Какова вероятность того, что из этих отрезков можно построить треугольник?

4.6. На отрезок единичной длины ставят наудачу 2 точки. Они разбивают отрезок на 3 части. Какова вероятность того, что из этих отрезков можно построить равнобедренный треугольник?

4.7. На плоскости начерчены 2 концентрические окружности, радиусы которых 5 и 10 см соответственно. Найти вероятность того, что точка, поставленная наудачу в большой круг, попадет в кольцо, образованное построенными окружностями.

4.8. На плоскости начерчены 2 концентрические окружности, радиусы которых 2 и 8 см соответственно. Найти вероятность того, что точка, поставленная наудачу в большой круг, попадет в кольцо, образованное построенными окружностями.

4.9. В круг вписан квадрат. В круг наудачу ставится точка. Какова вероятность того, что точка попадет в квадрат?

4.10. В квадрат вписан круг. В квадрат наудачу ставится точка. Какова вероятность того, что точка не попадет в круг?

4.11. В квадрат с вершинами в точках $O\,(0,\ 0)$, $K\,(0,\ 1)$, $L\,(1,\ 1)$, $M\,(1,\ 0)$ наудачу ставится точка $Q\,(x,\ y)$. Найти вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенству $y \geq 2x$.

4.12. В квадрат с вершинами в точках $O\,(0,\ 0)$, $K\,(0,\ 2)$, $L\,(2,\ 2)$, $M\,(2,\ 0)$ наудачу ставится точка $Q\,(x,\ y)$. Найти вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенству $y \leq 1 - x$.

4.13. Шар вписан в куб. Точка наудачу ставится в куб. Найти вероятность того, что точка попадет в шар.

4.14. В шар вписан куб. Точка наудачу ставится в шар. Найти вероятность того, что точка попадет в куб.

4.15. Для измерения площади озера на лист топографической карты случайным образом ставят точки. Определить примерную площадь озера, если известно, что лист карты имеет размеры 27 см на 32 см, масштаб карты: в 1 см — 2 км, а число точек, попавших на изображение озера, составляет 12% от общего числа точек, попавших на лист.

4.16. Для измерения площади рощи на снимок, сделанный с вертолета, случайным образом ставят точки. Определить примерную площадь рощи, если известно, что снимок имеет размеры 9 см на 12 см, масштаб съемки: в 1 см — 0,5 км, а число точек, попавших на изображение рощи, составляет 73% от общего числа точек, попавших на фотографию.

4.17. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов независимо и равновозможно в течение данных суток. Определить вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода равно одному часу, а второго — двум часам.

4.18. Два друга договорились о встрече между 13 и 14 часами. Каждый из них прибыл на назначенное место в случайный момент времени из установленного интервала. Они договорились ожидать друг друга в течение 10 мин после прихода на встречу. Какова вероятность того, что встреча состоялась?

4.19. В устройство поступают сигналы от двух приборов, причем поступление каждого из сигналов равновозможно в любой момент промежутка времени длительностью 30 с. Моменты поступления сигналов независимы один от другого. Устройство срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше 10 с. Найти вероятность того, что устройство сработает в течение 30 с, если каждый из приборов пошлет по одному сигналу.

4.20. Две радиостанции в течение получаса независимо друг от друга должны передать сообщения длительностью 5 и 15 мин соответственно. Какова вероятность того, что сообщения не перекроются по времени?

4.21. На плоскость нанесена система параллельных линий, расположенных на расстоянии 3 см друг от друга. На плоскость случайным образом брошена монета диаметром 1 см. Какова вероятность того, что монета не пересечет ни одну из линий?

4.22. На плоскость с нанесенной сеткой квадратов со стороной 6 см наудачу брошена монета радиусом 2 см. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одну из сторон квадрата.

5. СОБЫТИЯ

5.1. Подбрасывается игральный кубик. События: A — «выпадение шести очков», B — «выпадение трех очков», C — «выпадение четного числа очков», D — «выпадение числа очков, кратного трем». Каковы соотношения между этими событиями?

5.2. Подбрасывается игральный кубик. События: A_k ($k=1$, 2, 3, 4, 5, 6) — «выпадение k очков», A — «выпадение четного числа очков», B — «выпадение нечетного числа очков», C — «выпадение числа очков, кратного трем», D — «выпадение числа очков больше трех». Выразить события A, B, C и D через события A_k.

5.3. Извлекают две или более деталей из ящика, в котором находятся изделия трех сортов. События: A — «извлечена деталь первого сорта», B — «извлечена деталь второго сорта», C — «извлечена деталь третьего сорта». Опишите события: $A+B$; $A+C$; ABC; $AB+C$.

5.4. Извлекают два или более карандаша из коробки, в которой находятся карандаши только трех типов твердости: Н, В и НН. События: A — «извлечен карандаш типа Н», B — «извлечен карандаш типа В», C — «извлечен карандаш типа НН». Опишите события: AB; $B+C$; BBC; $AB+CB$.

5.5. Через произвольные события A, B, C выразить следующие события: а) произошло только событие A; б) произошло A и B, но C не произошло; в) произошло, по крайней мере, два события; г) произошло одно и только одно событие; д) произошло не более двух событий.

5.6. Через произвольные события A, B, C выразить следующие события: а) произошло только событие B; б) произошли все три события; в) произошло, по крайней мере, одно из этих событий; г) произошло два и только два события; д) ни одно событие не произошло.

5.7. Среди анкетируемых студентов случайным образом выбирают одного. События: A — «юноша», B — «не курит»; C — «живет в общежитии». Описать событие $AB\bar{C}$. При каких дополнительных условиях будут иметь место соотношения: $ABC=A$; $\bar{C}\supseteq B$? Когда будет верно равенство $\bar{A}=B$?

5.8. Среди анкетируемых студентов случайным образом выбирают одного. События: A — «второкурсник», B — «получает второе образование», C — «не живет в общежитии». Описать событие $\bar{A}B\bar{C}$. При каких дополнительных условиях будут иметь место соотношения: $A\bar{B}\bar{C}=A$; $\bar{A}\supseteq B$? Когда будет верно равенство $\bar{A}=C$?

5.9. Произведено три выстрела по мишени. События: A — «попадание в мишень при первом выстреле», B — «промах при втором выстреле», C — «цель поражена». Можно ли через указанные события выразить следующие события: «промах»; «попадание в мишень при третьем выстреле»; «больше одного попадания»; «хотя бы два попадания».

5.10. Произведено три выстрела по мишени. События: A — «цель поражена»; B — «промах при первом выстреле», С — «попадание в мишень при третьем выстреле». Можно ли через указанные события выразить следующие события: «попадание в мишень при втором выстреле»; «ровно два попадания»; «хотя бы одно попадание»; «не больше одного попадания».

6. СЛОЖЕНИЕ И УМНОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

6.1. Найти вероятность совместного поражения цели двумя орудиями, если вероятность поражения цели первым орудием равна 0,8, а вторым — 0,7.

6.2. Найти вероятность совместного появления герба при одном бросании двух монет.

6.3. Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. Найти вероятность того, что попадание произойдет при третьем выстреле.

6.4. Производятся попытки телефонного соединения до тех пор, пока соединение не установится. Вероятность соединения при каждой попытке равна 0,75. Найти вероятность того, что соединение произойдет при четвертой попытке.

6.5. Бросается правильная игральная кость. Событие A заключается в выпадении числа очков меньше 6, а событие B состоит в выпадении числа очков больше 2. Тогда что представляет собой условное событие B/A и какова его вероятность?

6.6. Бросается правильная игральная кость. Событие A заключается в выпадении числа очков больше 2, а событие B состоит в выпадении нечетного числа очков. Тогда что представляет собой условное событие B/A и какова его вероятность?

6.7. Имеется 3 ящика, содержащих по 40 деталей. В первом ящике 38, во втором 37 и в третьем 35 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными.

6.8. В каждой из трех урн по 50 шариков: в первой — 15 синих, во второй — 40 синих, в третьей — 30 синих. Из каждой урны наудачу вынимают по одному шарику. Найти вероятность того, что все три вынутые шарика окажутся синими.

6.9. Лучник делает два независимых выстрела по мишени, разделенной на сектора. Вероятность попадания в первый сектор равна 0,4, во второй — 0,3. Какова вероятность попадания хотя бы в один из указанных секторов?

6.10. Вероятность попадания в мишень для первого спортсмена 0,85, а для второго — 0,8. Спортсмены независимо друг от друга сделали по одному выстрелу. Найти вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один спортсмен.

6.11. Вероятность того, что к кормушке прилетит синица, равна 0,5, снегирь — 0,3, а воробей — 0,9. Найти вероятность того, что среди трех прилетевших птиц хотя бы две разной породы.

6.12. Имеются две урны с шарами трех цветов. В первой находятся 3 синих, 3 красных, 2 зеленых, а во второй — 2 синих, 3 красных и 4 зеленых. Из каждой урны достают по одному шару и сравнивают их цвета. Найти вероятность того, что цвета вынутых шаров одинаковы.

6.13. Имеются два мешка с мягкими игрушками. В первом находятся 10 зайцев, 6 медвежат и 9 тигрят, а во втором — 5 зайцев, 12 медвежат и 8 тигрят. Из каждого мешка случайным образом извлекают по одной игрушке. Найти вероятность того, что игрушки одинаковы.

6.14. Для оповещения об аварии установлено два сигнализатора, работающих независимо. Первый срабатывает на аварию с вероятностью 0,9, а второй — с вероятностью 0,8. Найти вероятность того, что при аварии оба сигнализатора не сработают.

6.15. Для оповещения о задымлении установлено два сигнализатора, работающих независимо. Первый срабатывает с вероятностью 0,5, а второй — с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что в случае задымления поступит сигнал.

6.16. Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий соответственно: 0,6; 0,7 и 0,9. Найти вероятность хотя бы одного попадания при одном залпе из всех орудий.

6.17. Предприятие изготовляет 95% изделий стандартных, причем из них 86% — первого сорта. Найти вероятность того, что взятое наудачу изделие, изготовленное на этом предприятии, окажется первого сорта.

6.18. Сообщение принимается без помех в 98% случаев, причем 86% помех вызваны атмосферными явлениями. Найти вероятность того, что сообщение будет принято с помехами, вызванными атмосферными явлениями.

6.19. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 сначала выбирается одна, а затем из оставшихся — вторая цифра. При этом все исходы равновероятны. Найти вероятность того, что будет выбрана нечетная цифра: а) в первый раз; б) во второй раз; в) оба раза.

6.20. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 сначала выбирается одна, а затем из оставшихся — вторая цифра. При этом все исходы равновероятны. Найти вероятность того, что будет выбрана четная цифра: а) в первый раз; б) во второй раз; в) оба раза.

6.21. Три электрические лампочки последовательно включены в цепь. Вероятность того, что одна (любая) лампочка перегорит, если напряжение в сети превысит номинальное, равна 0,7. Найти вероятность того, что при повышенном напряжении тока в цепи не будет.

6.22. Три электрические лампочки параллельно включены в цепь. Вероятность того, что одна (любая) лампочка перегорит, если напряжение в сети превысит номинальное, равна 0,85. Найти вероятность того, что при повышенном напряжении тока в цепи не будет.

6.23. Вероятность того, что некоторое событие появится хотя бы один раз при трех независимых испытаниях, равна 0,75. Найти вероятность появления события в одном испытании при условии, что вероятность появления события в обоих испытаниях одна и та же.

6.24. Вероятность того, что некоторое событие появится хотя бы один раз при двух независимых испытаниях, равна 0,4. Найти вероятность появления события в одном испытании при условии, что вероятность появления события в обоих испытаниях одна и та же.

6.25. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу определенного продукта в каталоге, равна 0,02. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу того же продукта на рекламном стенде, равна 0,08. Предполагается, что оба события независимы. Чему равна вероятность того, что потребитель увидит: обе рекламы; хотя бы одну рекламу?

6.26. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу определенного продукта в журнале, равна 0,005. Вероятность того, что потребитель увидит рекламный ролик того же продукта равна 0,2. Предполагается, что оба события независимы. Чему равна вероятность того, что потребитель: не увидит никакой рекламы продукта; увидит хотя бы какую-то рекламу?

6.27. Покупатель может приобрести акции трех компаний: A, B и C. В течение следующего года надежность первой компании оценивается экспертами в $99{,}3\%$, второй — в $98{,}5\%$, третьей — $97{,}1\%$. Чему равна вероятность того, что в течение следующего года: две компании обанкротятся; ни одна из компаний не обанкротится?

6.28. Вкладчик может открыть счет в трех банках: A, B и C. В течение трех следующих лет вероятность повышения процентов по вкладу в этих банках оценивается экспертами соответственно в $0{,}7$; $0{,}1$ и $0{,}5\%$. Чему равна вероятность того, что в течение трех лет: только один банк повысит проценты; все три банка повысят проценты?

6.29. Мастер обслуживает 5 станков. 15% рабочего времени он проводит у первого станка, 10% — у второго, 30% — у третьего, 25% — у четвертого, остальное время — у пятого. Найти вероятность того, что в наудачу выбранный момент времени он находится: а) у первого или третьего станка; б) у второго или пятого станка; в) у первого или второго, или четвертого станка.

6.30. Работник следит за работой 5 компьютеров. 10% рабочего времени он обслуживает второй компьютер, 10% — третий, 15% — четвертый, 15% — пятый, остальное время он занят первым компьютером. Найти вероятность того, что в наудачу выбранный момент времени он находится: а) у первого или четвертого компьютера; б) у третьего или пятого компьютера; в) у первого или второго, или третьего компьютера.

6.31. С первого станка на сборку поступило 200 деталей, из которых 190 стандартных; со второго — 300, из которых 280 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу взятая деталь будет стандартной.

6.32. 82% выпускников университета и 69% выпускников академии изучали английский язык. Найти вероятность того, что случайным образом выбранный выпускник одного из этих вузов не изучал английского языка.

6.33. На фабрике, изготовляющей болты, первая машина производит 30%, вторая — 25%, третья — 45% всех изделий. Брак в их продукции составляет соответственно 2, 1, 3%. Найти вероятность того, что случайно выбранный болт оказался дефектным.

6.34. В 5 ящиках находятся одинаковые по размерам и весу шары. В двух ящиках — по 4 синих и 16 красных шаров, в двух других ящиках — по 18 синих и 2 красных шара, в одном ящике — 10 синих и 10 красных шаров. Наудачу выбирается ящик и из него извлекается шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар окажется красным?

6.35. Партия электрических лампочек на 20% изготовлена первым заводом, на 30% — вторым, на 50% — третьим. Вероятности выпуска бракованных лампочек соответственно равны: 0,01; 0,005 и 0,006. Найти вероятность того, что наудачу взятая и оказавшаяся стандартной лампочка произведена вторым заводом.

6.36. На распределительной базе находятся электрические лампочки, изготовленные на трех заводах. Среди них 45% изготовлено — первым заводом, 40% — вторым, остальные — третьим. Известно, что из каждых 100 лампочек, изготовленных первым заводом, 95 удовлетворяют стандарту, а из 100 лампочек, изготовленных как вторым, так и третьим заводами, удовлетворяют стандарту 85. Найти вероятность того, что наудачу взятая и оказавшаяся бракованной лампочка произведена третьим заводом.

6.37. В данный район изделия поставляются тремя фирмами в отношении 3:4:6. Среди продукции первой фирмы стандартные изделия составляют 95%, второй — 80%, третьей — 75%. Найти вероятность того, что приобретенное изделие окажется нестандартным.

6.38. На стрельбах по множественным целям три разных орудия выпускают снаряды в соотношении 1:2:3. Вероятность попадания в цель орудий равна соответственно: 0,9; 0,75 и 0,5. Найти вероятность того, что наугад выбранная цель не будет поражена.

6.39. На предприятии изготовляются одинаковые изделия на трех поточных линиях. На первой линии производится 40% изделий от общего объема их производства, на второй — 35%, на третьей — остальная часть продукции. Согласно техническим паспортам каждая из линий характеризуется соответственно следующими процентами годности изделий: 93, 99, 95%. Случайным образом для проверки было выбрано одно изделие, оказавшееся годным. Подтвердились ли технические характеристики линий?

6.40. В ящике находятся одинаковые изделия, изготовленные на 3 автоматах: 30% изделий изготовлено первым автоматом, 35% изделий изготовлено вторым автоматом, остальные — третьим. Согласно техническим характеристикам брак в продукции первого и третьего автоматов составляет 3%, второго — 2%. Случайным образом для проверки было выбрано одно изделие, оказавшееся бракованным. Какие коррективы следует внести в технические характеристики автоматов?

6.41. В первой урне содержатся 3 черных и 3 белых шара, во второй — 4 черных и 1 белый. Из первой урны во вторую случайным образом переложили два шара. Какова вероятность того, что шар, наудачу вынутый потом из второй урны, окажется белым?

6.42. В первом ящике лежат 31 спелый и 3 незрелых персика, во втором — 29 спелых и 7 незрелых. Из второго ящика в первый случайным образом переложили 2 персика. Какова вероятность того, что персик, наудачу вынутый потом из первого ящика, окажется спелым?

6.43. В ящик, содержащий 3 одинаковые детали, брошена стандартная деталь, а затем наудачу извлечена одна деталь. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь, если равновероятны все возможные предположения о числе стандартных деталей, первоначально находящихся в ящике.

6.44. В ящик, содержащий 4 одинаковые детали, брошена нестандартная деталь, а затем наудачу извлечена одна деталь. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь, если равновероятны все возможные предположения о числе стандартных деталей, первоначально находящихся в ящике.

6.45. При отклонении от нормального режима работы автомата сигнализатор A срабатывает с вероятностью 0,8, а сигнализатор B срабатывает с вероятностью 1. Вероятности того, что автомат снабжен сигнализатором A или B, соответственно равны 0,6 и 0,4. Получен сигнал об отклонении в режиме работы автомата. Что вероятнее: автомат снабжен сигнализатором A или B?

6.46. Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру, равна 0,55, а ко второму — 0,45. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером, равна 0,94, а вторым — 0,98. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Что вероятнее: эту деталь проверил первый или второй контролер?

6.47. На РЛС (радиолокационную станцию) равновозможно поступает либо только шум (нет цели), либо смесь сигнала с шумом (есть цель). Известно, что РЛС при наличии только шума может ошибиться и зарегистрировать цель (ошибка ложной тревоги) с вероятностью 0,1; а при наличии сигнала с шумом цель правильно регистрируется с вероятностью 0,7. РЛС зарегистрировала цель. Какова вероятность, что РЛС не ошиблась?

6.48. Сигналы «0» и «1» поступают на приемное устройство. Из-за помех распознающее устройство идентифицирует «0» как «0» только с вероятностью 0,6 и «1» как «1» с вероятностью 0,87. Один посланный сигнал был распознан как «1». Какова вероятность, что устройство ошиблось?

7. СХЕМА ИСПЫТАНИЙ БЕРНУЛЛИ И ПРОСТЕЙШИЙ ПОТОК СОБЫТИЙ

7.1. Монету бросают 8 раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет 3 раза.

7.2. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного стрелка 0,4 и не зависит от номера выстрела. Найти вероятность того, что при 5 выстрелах произойдет ровно 2 попадания в мишень.

7.3. Среди 20 счетных палочек 15 белых и 5 зеленых. Наугад взяли 6 палочек. Найти вероятность того, что среди них: ровно 4 зеленых; не менее 3 белых.

7.4. Подбрасывается 5 идеальных игральных кубиков. Найти вероятность того, что: выпало ровно 3 единицы; выпало более одной шестерки.

7.5. Вероятность того, что расход воды в течение одних суток не превысит установленной нормы, равна 0,8. Найти вероятность того, что в ближайшие 10 суток расход электроэнергии в течение каких-либо 7 суток не превысит нормы.

7.6. Вероятность того, что расход электроэнергии в течение одних суток не превысит установленной нормы, равна 0,6. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение каких-либо 4 суток не превысит нормы.

7.7. Применяемый метод лечения приводит к выздоровлению в 95% случаев. Какова вероятность того, что из 6 больных поправятся не менее 4?

7.8. Применяемый метод лечения не приводит к выздоровлению в 15% случаев. Какова вероятность того, что из 5 больных поправятся не менее 3?

7.9. Всхожесть семян данного растения равна 95%. Найти вероятность того, что из 4 посеянных семян взойдут: 3; не менее 3.

7.10. Всхожесть семян данного растения равна 90%. Найти вероятность того, что из 10 посеянных семян взойдут: 6; не менее 9.

7.11. Доля незрелых арбузов составляет 35%. Чему равно наивероятнейшее число зрелых арбузов в случайно отобранной партии из 85 штук?

7.12. Доля изделий высшего сорта на данном предприятии составляет 30%. Чему равно наивероятнейшее число изделий высшего сорта в случайно отобранной партии из 75 изделий?

7.13. Брак при пошиве рюкзаков составляет в среднем 16%. Найти наивероятнейшее число качественных рюкзаков среди 7 сшитых и соответствующую этому числу вероятность.

7.14. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найти наиболее вероятное число попаданий в мишень при 5 выстрелах и соответствующую этому числу вероятность.

7.15. Какова вероятность наступления события в каждом испытании, если наивероятнейшее число наступлений этого события в 120 испытаниях равно 32?

7.16. Какова вероятность наступления события в каждом испытании, если наивероятнейшее число наступлений этого события в 110 испытаниях равно 74?

7.17. Вероятность рождения мальчика равна 0,525. В некоторой семье 6 детей. Найти вероятность того, что среди них не больше 2 девочек.

7.18. Вероятность рождения девочки равна 0,496. В некоторой семье 7 детей. Найти вероятность того, что среди них не больше 3 мальчиков.

7.19. Для нормальной работы автобазы на линии должно быть не менее 8 машин, а имеется их 10. Вероятность невыхода каждой автомашины на линию равна 0,1. Найти вероятность нормальной работы автобазы на ближайший день.

7.20. Для нормальной работы магазина вечером должно работать не менее 7 касс, а в штате всего 12 кассиров. Вероятность выхода кассира на работу вечером по графику равна 0,7. Найти вероятность нормальной работы магазина на ближайший вечер.

7.21. 8 раз из колоды в 36 карт вытягивают по одной игральной карте, причем каждый раз ее вкладывают обратно и карты перемешивают. Найти вероятность того, что туз выпадет: а) от 3 до 7 раз; б) ни разу.

7.22. Монета подброшена 10 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет: а) от 4 до 6 раз; б) хотя бы один раз.

7.23. Какое минимальное число страниц текста нужно проверить, чтобы с вероятностью не меньше 0,75 можно было бы найти хотя бы одну опечатку, если в среднем на 10 страниц приходится 3 опечатки.

7.24. Какое минимальное количество выстрелов нужно произвести, чтобы с вероятностью не меньше 0,85 можно было хотя бы один раз попасть в цель, если в среднем на 100 выстрелов приходится 72 попадания.

7.25. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть не менее 2 партий из 4 или не менее 3 партий из 6? Ничьи во внимание не принимаются.

7.26. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть не менее 3 партий из 5 или не менее одной партий из 2? Ничьи во внимание не принимаются.

7.27. При стрельбе по мишени вероятность попадания при одном выстреле равна 0,6. При каком числе выстрелов наивероятнейшее число попаданий равно 12?

7.28. При пошиве одного изделия вероятность обрыва нити равна 0,1. При пошиве какого числа изделий наивероятнейшее число обрыва равно 2?

7.29. Из каждых 40 изделий, изготовленных станком-автоматом, 5 являются бракованными. Наугад взяли 400 изделий. Найти вероятность того, что среди них 360 без брака.

7.30. Из каждых 20 пачек чая 3 имеют дефекты на упаковке. Наугад взяли 200 пачек. Найти вероятность того, что среди них 280 без дефекта на упаковке.

7.31. Ткач обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нитки на одном из веретен в течение одной минуты равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение одной минуты обрыв произойдет на 9 веретенах.

7.32. Вероятность изготовления нестандартной детали 0,003. Найти вероятность того, что среди 2000 деталей окажется 5 нестандартных.

7.33. Производятся независимые испытания, в каждом из которых событие может появиться с вероятностью 0,001. Какова вероятность того, что при 2000 испытаниях это событие появится не менее 2 и не более 4 раз?

7.34. Производятся независимые испытания, в каждом из которых событие может появиться с вероятностью 0,002. Какова вероятность того, что при 5000 испытаниях это событие появится не менее 7 и не более 9 раз?

7.35. Телефонная станция обслуживает 500 абонентов. Для каждого абонента вероятность того, что в течение часа он позвонит на станцию, равна 0,01. Найти вероятности следующих событий: «в течение часа 5 абонентов позвонят на станцию»; «в течение часа не более 4 абонентов позвонят на станцию».

7.36. Телефонная станция обслуживает 400 абонентов. Для каждого абонента вероятность того, что в течение часа он позвонит на станцию, равна 0,02. Найти вероятности следующих событий: «в течение часа 6 абонентов позвонят на станцию»; «в течение часа не менее 3 абонентов позвонят на станцию».

7.37. При введении вакцины против полиомиелита иммунитет создается в 99,98% случаев. Какова вероятность того, что из 1000 вакцинированных детей заболеет соответственно 1, 2, 3, 4 ребенка; не заболеет ни один ребенок?

7.38. При замачивании семян в стимулирующем растворе семена прорастают в 89,5% случаев. Какова вероятность того, что из 500 замоченных семян не прорастут 1, 3, 5, 7 семян; прорастут все семена?

7.39. На АТС поступило 1000 звонков от абонентов. Вероятность неправильного соединения равна 0,004. Какое событие вероятнее: 3 неправильных соединения; 5 неправильных соединений?

7.40. Коммутатор учреждения обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течение одной минуты абонент позвонит на коммутатор, равна 0,02. Какое событие вероятнее: в течение одной минуты позвонят 3 абонента, или позвонят 4 абонента?

7.41. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно 2. Найти вероятность того, что за 5 мин поступит: 2 вызова; менее 2 вызовов; не менее 2 вызовов. Найти наивероятнейшее число поступивших за одну минуту вызовов и соответствующую этому числу вероятность.

7.42. В страховую компанию в среднем поступает 2 иска в час. Определите вероятность того, что в течение 1,5 часов: не поступит ни одного иска; поступит один иск; поступит не более 2 исков. Найти наивероятнейшее число поступивших за один час исков и соответствующую этому числу вероятность.

7.43. Найти среднее число опечаток на странице рукописи, если вероятность того, что страница рукописи содержит хотя бы одну опечатку, равна 0,95.

7.44. Найти среднее число бракованных драже в пачке, если вероятность того, что пачка содержит хотя бы одно бракованное драже, равна 0,98.

7.45. Имеется партия в 1800 деталей. Вероятность того, что деталь окажется бракованной, равна 0,02. Найти вероятность того, что: в этой партии 30 бракованных деталей; бракованных деталей будет менее 30; количество бракованных деталей будет от 30 до 50. Найти наивероятнейшее число бракованных деталей и соответствующую этому числу вероятность.

7.46. Из винтовки будет произведено 1000 выстрелов. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,7. Найти вероятность того, что: произойдет ровно 655 попаданий; менее 800 попаданий; от 600 до 700 попаданий. Найти наивероятнейшее число попаданий и соответствующую этому числу вероятность.

8. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

8.1. Возможные значения случайной величины: $x_1=2$, $x_2=5$, $x_3=8$. Известны вероятности двух возможных значений: $p_1=0{,}4$, $p_2=0{,}15$. Найти вероятность значения x_3.

8.2. Возможные значения случайной величины: $x_1=-6$, $x_2=0$, $x_3=1$. Известны вероятности двух возможных значений: $p_2=0{,}1$, $p_3=0{,}45$. Найти вероятность значения x_1.

8.3. Написать закон распределения вероятностей числа появлений шестерки, если игральная кость брошена 5 раз.

8.4. Написать закон распределения вероятностей числа появлений события A в четырех независимых испытаниях, если вероятность появления события в каждом испытании равна 0,6.

8.5. В коробке 7 карандашей, из которых 4 красные. Из этой коробки наудачу вынимают 3 карандаша. Найти закон распределения случайной величины X, равной числу красных карандашей в выборке.

8.6. В ящике лежат 6 яблок и 4 груши. Из этого ящика наудачу вынимают 5 фруктов. Найти закон распределения случайной величины X, равной числу груш в выборке.

8.7. Задан закон распределения дискретной случайной величины X:

x_i	-2	-1	0	2	3
p_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Найти функцию распределения и построить ее график; построить гистограмму.

8.8. Задан закон распределения дискретной случайной величины X:

x_i	1	2	4	6	7
p_i	0,2	0,2	0,1	0,4	0,1

Найти функцию распределения и построить ее график; построить гистограмму.

8.9. Пусть X — число натуральных делителей числа от 1 до 15 (единица и само число рассматриваются в качестве делителей). Найти: частоту значений случайной величины X; закон распределения случайной величины X; функцию распределения. Построить график функции распределения и гистограмму. Найти вероятность события $2 \leq X \leq 5$.

8.10. Пусть X — число натуральных делителей числа от 16 до 30 (единица и само число рассматриваются в качестве делителей). Найти: частоту значений случайной величины X; закон распределения случайной величины X; функцию распределения. Построить график функции распределения и гистограмму. Найти вероятность события $3 \leq X \leq 6$.

8.11. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, зная закон ее распределения:

x_i	3	5	2
p_i	0,1	0,6	0,3

8.12. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, зная закон ее распределения:

x_i	−2	0	4
p_i	0,5	0,1	0,4

8.13. Найти математическое ожидание, дисперсию и построить гистограмму случайной величины X, зная закон ее распределения:

x_i	−3	−1	0	1	2	3	4
p_i	0,1	0,2	0,3	0,1	0,1	0,1	0,1

8.14. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, зная закон ее распределения:

x_i	−2	−1	1	2	3	5	7
p_i	0,1	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2	0,2

8.15. Производится 3 выстрела с вероятностями попадания в цель, равными: 0,2; 0,5 и 0,6. Найти математическое ожидание общего числа попаданий. Построить гистограмму.

8.16. Производится 4 выстрела с вероятностями попадания в цель, равными: 0,3; 0,5; 0,8 и 0,9. Найти математическое ожидание общего числа попаданий. Построить гистограмму.

8.17. Дискретные независимые случайные величины X и Y заданы законами распределения:

x_i	1	2
p_i	0,3	0,7

y_i	−0,5	0	1
p_i	0,2	0,6	0,2

Найти математическое ожидание произведения XY и суммы $X+Y$ двумя способами: а) составив закон распределения XY и $X+Y$; б) пользуясь свойствами математического ожидания.

8.18. Дискретные независимые случайные величины X и Y заданы законами распределения:

x_i	−1	0	2
p_i	0,4	0,3	0,3

y_i	−0,5	1
p_i	0,4	0,6

Найти математическое ожидание произведения XY и суммы $X+Y$ двумя способами: а) составив закон распределения XY и $X+Y$; б) пользуясь свойствами математического ожидания.

8.19. Найти математическое ожидание и дисперсию числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 20 билетов, причем вероятность выигрыша по одному билету равна 0,2.

8.20. Найти математическое ожидание и дисперсию числа проросших семян, если посажено 15 семян, причем вероятность прорастания равна 0,5.

8.21. Сравнить математические ожидания и дисперсии, найти средние квадратические отклонения и построить гистограммы независимых случайных величин X и Y, заданных законами распределения:

x_i	−2	−1	2	4
p_i	0,48	0,03	0,08	0,41

y_i	−2	−1	2	4
p_i	0,25	0,25	0,25	0,25

8.22. Сравнить математические ожидания и дисперсии, найти средние квадратические отклонения и построить гистограммы независимых случайных величин X и Y, заданных законами распределения:

x_i	−6	−3	0	1
p_i	0,2	0,2	0,3	0,3

y_i	−6	−3	0	1
p_i	0,13	0,45	0,35	0,07

8.23. Среднее квадратическое отклонение каждого отдельного измерения равно 6, математическое ожидание каждого отдельного измерения равно 2,5. Всего произведено 36 измерений. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение среднего арифметического этих измерений.

8.24. Среднее квадратическое отклонение каждого отдельного измерения равно 5, математическое ожидание каждого отдельного измерения равно −4. Всего произведено 25 измерений. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение среднего арифметического этих измерений.

8.25. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны: вероятность $p_1=0{,}6$; математическое ожидание $M(X)=3{,}5$ и дисперсия $D(X)=0{,}25$. Найти закон распределения дискретной случайной величины X.

8.26. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1 > x_2$. Известны: вероятность $p_1 = 0,2$; математическое ожидание $M(X) = -4$ и дисперсия $D(X) = 1$. Найти закон распределения дискретной случайной величины X.

8.27. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

x_i	−4	−3	−2	−1	0
p_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Найти центральные моменты первого, второго и третьего порядков случайной величины X. Построить гистограмму и график функции распределения.

8.28. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

Найти центральные моменты первого, второго и третьего порядков случайной величины X. Построить гистограмму и график функции распределения.

8.29. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

x_i	−3	−1	0	1
p_i	0,1	0,2	0,3	0,4

Записать закон распределения случайной величины $X^3 + 2X$.

8.30. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

x_i	−1	0	1	2
p_i	0,2	0,1	0,5	0,2

Записать закон распределения случайной величины $X^2 - 3X$.

8.31. Известны дисперсии двух независимых случайных величин: $D(X) = -4$ и $D(Y) = 3$. Найти дисперсию величины: $X - 2$; $2Y + 1$; $X - Y$; $X - 2Y$.

8.32. Известны дисперсии двух независимых случайных величин: $D(X) = 1$ и $D(Y) = -2$. Найти дисперсию величины: $Y + 2$; $3X - 1$; $X + Y$; $2X - 3Y$.

8.33. Дискретная случайная величина X задана распределением:

x_i	-1	1	3
p_i	0,2	0,5	0,3

Для случайной величины $\varphi(X) = X^2 + 2$ найти: закон распределения, функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию.

8.34. Дискретная случайная величина X задана распределением:

x_i	-2	0	2
p_i	0,1	0,4	0,6

Для случайной величины $\varphi(X) = X^2 - 3$ найти: закон распределения, функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию.

9. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

9.1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le -1; \\ (x+1)/3, & \text{при} \quad -1 < x < 2; \\ 1, & \text{при} \quad x \ge 2. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (0; 1).

9.2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 1;\\ (x-1)/2, & \text{при } 1<x<3;\\ 1, & \text{при } x\ge 3.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (1; 2).

9.3. Распределение вероятностей случайной величины X задано интегральной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0;\\ x^3/125, & \text{при } 0\le x\le 5;\\ 1, & \text{при } x>5.\end{cases}$$

Построить график функции плотности распределения вероятностей случайной величины X. Вычислить вероятность попадания случайной величины в интервал (2; 3). Найти для случайной величины X математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение.

9.4. Распределение вероятностей случайной величины X задано интегральной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0;\\ x^2/16, & \text{при } 0\le x\le 4;\\ 1, & \text{при } x>4.\end{cases}$$

Построить график функции плотности распределения вероятностей случайной величины X. Вычислить вероятность попадания случайной величины в интервал (0; 2). Найти для случайной величины X математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение.

9.5. Определив подходящее значение параметра γ, найти функцию распределения вероятностей $F(x)$ по данной плотности распределения: $f(x)=(x+3)/\gamma$ при $x\in(-3;\,0)$; $f(x)=(3-x)/\gamma$ при $x\in[0;\,3)$; $f(x)=0$ при $x\notin(-3;\,3)$. Построить графики функции и плотности распределения вероятностей.

9.6. Определив подходящее значение параметра γ, найти функцию распределения вероятностей $F(x)$ по данной плотности распределения: $f(x)=(2+x)/\gamma$ при $x \in (-2;\ 0]$; $f(x)=(2-x)/\gamma$ при $x \in (0;\ 2)$; $f(x)=0$ при $x \notin (-2;\ 2)$. Построить графики функции и плотности распределения вероятностей.

9.7. Плотность распределения случайной величины X равна $f(x)=\dfrac{1}{(e^{-2x}+e^{2x})\gamma}$. Найти постоянный параметр γ, функцию распределения $F(x)$ и вероятность $P\{-1<X\leq 0\}$.

9.8. Плотность распределения случайной величины X равна $f(x)=\dfrac{\gamma}{e^{-x}+e^{x}}$. Найти постоянный параметр γ, функцию распределения $F(x)$ и вероятность $P\{0\leq X<2\}$.

9.9. Плотность распределения случайной величины X имеет вид: $f(x)=\dfrac{\gamma}{\sqrt{9-x^2}}$ при $x \in (-3;\ 3)$ и $f(x)=0$ при $x \notin (-3;\ 3)$. Вычислить неизвестную константу γ, а также для случайной величины X: а) построить график функции плотности распределения вероятностей; б) вычислить математическое ожидание и дисперсию; в) найти вероятность попадания значений случайной величины X в интервал (0; 5).

9.10. Плотность распределения случайной величины X имеет вид: $f(x)=\dfrac{1}{\gamma\sqrt{4-x^2}}$ при $x \in (-2;\ 2)$ и $f(x)=0$ при $x \notin (-2;\ 2)$. Вычислить неизвестную константу γ, а также для случайной величины X: а) построить график функции плотности распределения вероятностей; б) вычислить математическое ожидание и дисперсию; в) найти вероятность попадания значений случайной величины X в интервал (1; 4).

9.11. Непрерывная случайная величина имеет плотность распределения следующего вида: $f(x)=\gamma\sin 2x$ при

$x \in (0, \pi/2)$ и $f(x)=0$ при $x \notin (0, \pi/2)$. Найти неизвестный параметр распределения γ. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Показать на графике плотности значения математического ожидания и среднего квадратического отклонения. Найти вероятность попадания значений случайной величины на отрезок $[0; \pi/4]$; показать на графике эту вероятность.

9.12. Непрерывная случайная величина имеет плотность распределения следующего вида: $f(x)=\gamma\cos x$ при $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ и $f(x)=0$ при $x \notin (-\pi/2, \pi/2)$. Найти неизвестный параметр распределения γ. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Показать на графике плотности значения математического ожидания и среднего квадратического отклонения. Найти вероятность попадания значений случайной величины на отрезок $[0; \pi/3]$; показать на графике эту вероятность.

9.13. Случайная величина имеет равномерное распределение на отрезке $[-5; 7]$. Найти вероятность попадания X в промежуток $[5; 6]$. Построить график плотности заданного равномерного распределения и указать на нем фигуру, соответствующую найденной вероятности. Вычислить математическое ожидание данной случайной величины и показать его на графике, найти среднее квадратическое отклонение.

9.14. Случайная величина имеет равномерное распределение на отрезке $[-2; 4]$. Найти вероятность попадания X в промежуток $[-1; 1]$. Построить график плотности заданного равномерного распределения и указать на нем фигуру, соответствующую найденной вероятности. Вычислить математическое ожидание данной случайной величины и показать его на графике, найти среднее квадратическое отклонение.

9.15. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром $\lambda=3$. Найти вероятность попадания этой случайной величины в промежутки $(-\infty; 3)$ и $(-1; 3)$. Построить график плотности этого распределения и указать фигуры, соответствующие найденным вероятностям. Найти математическое ожидание X и показать его на графике. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

9.16. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром $\lambda=1$. Найти вероятность попадания этой случайной величины в промежутки $(0; +\infty)$ и $(0; 10)$. Построить график плотности этого распределения и указать фигуры, соответствующие найденным вероятностям. Найти математическое ожидание X и показать его на графике. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

9.17. Имеется простейший поток событий, в котором время между двумя соседними событиями подчиняется показательному закону распределения. Найти вероятность того, что между двумя последовательными событиями пройдет не менее 0,1 минуты, если интенсивность потока событий равна 6,3 события в минуту.

9.18. Имеется простейший поток событий, в котором время между двумя соседними событиями подчиняется показательному закону распределения. Найти вероятность того, что между двумя последовательными событиями пройдет не более 3,5 минут, если интенсивность потока событий равна 3 события в минуту.

9.19. Среднее квадратическое отклонение случайной величины, распределенной по нормальному закону, равно 2 см, а математическое ожидание равно 16 см. Найти границы, в которых с вероятностью 0,95 следует ожидать значение случайной величины.

9.20. Среднее квадратическое отклонение случайной величины, распределенной по нормальному закону, равно 3 м, а математическое ожидание равно 10 м. Найти границы, в которых с вероятностью 0,95 следует ожидать значение случайной величины.

9.21. Случайная величина X распределена нормально. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение X соответственно равны 20 и 10. Найти вероятность того, что отклонение от математического ожидания по абсолютной величине будет меньше 3.

9.22. Случайная величина X распределена нормально. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение X соответственно равны 10 и 20. Найти вероятность того, что отклонение от математического ожидания по абсолютной величине будет меньше 3.

9.23. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $a=-2$ и $\sigma=0$. Найти вероятность попадания X в промежуток $[-6; 0]$. Построить график плотности заданного нормального распределения, показать математическое ожидание и вычисленную вероятность на графике плотности нормального распределения.

9.24. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $a=0$ и $\sigma=2$. Найти вероятность попадания X в промежуток $[-2; 2]$. Построить график плотности заданного нормального распределения, показать математическое ожидание и вычисленную вероятность на графике плотности нормального распределения.

9.25. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $a=1$ и $\sigma=2$. Найти вероятность попадания X в промежуток $(0; +\infty)$. Построить график плотности заданного нормального распределения, показать математическое ожидание и вычисленную вероятность на графике плотности нормального распределения. Проверить правило трех сигм.

9.26. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $a=2$ и $\sigma=1$. Найти вероятность попадания X в промежуток $(-\infty;\ 0)$. Построить график плотности заданного нормального распределения, показать математическое ожидание и вычисленную вероятность на графике плотности нормального распределения. Проверить правило трех сигм.

9.27. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и дисперсия этой величины соответственно равны 3 и 16. Найти вероятность того, что отклонение величины X от ее математического ожидания по модулю не превзойдет 2.

9.28. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и дисперсия этой величины соответственно равны 0 и 9. Найти вероятность того, что отклонение величины X от ее математического ожидания по модулю не превзойдет 1.

9.29. Диаметр изготавливаемой в цехе детали является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с параметрами $a=4{,}5$ см и $\sigma=0{,}02$ см. Найти вероятность того, что размер диаметра взятой наугад детали отличается от математического ожидания не более чем на 1 мм.

9.30. Вес пачки крупы является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с параметрами $a=0{,}9$ кг и $\sigma=0{,}01$ кг. Найти вероятность того, что вес взятой наугад пачки отличается от математического ожидания не более чем на 0,02 кг.

9.31. При изготовлении некоторого изделия его вес X подвержен случайным колебаниям. Стандартный вес изделия равен 30 г, его среднее квадратическое отклонение равно 0,7, а случайная величина X распределена по нормальному закону. Найти вероятность того, что вес наугад выбранного изделия находится в пределах от 28 до 31 г.

9.32. При изготовлении мотков пряжи длина X нити в мотке подвержена случайным колебаниям. Стандартная длина нити равна 40 м, ее среднее квадратическое отклонение равно 0,3 м, а случайная величина X распределена по нормальному закону. Найти вероятность того, что длина нити наугад выбранного мотка находится в пределах от 39,5 до 40,5 м.

9.33. Месячная прибыль компании мобильной связи является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием 1000 и дисперсией 2500. Чему равна вероятность того, что прибыль компании окажется: а) в пределах от 500 до 850; б) более 1100? Построить график плотности данного нормального распределения и указать на графике области, соответствующие найденным вероятностям.

9.34. Вес мешка цемента является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием 50 и дисперсией 9. Чему равна вероятность того, что вес мешка окажется: а) в пределах от 30 до 45; б) более 56? Построить график плотности данного нормального распределения и указать на графике области, соответствующие найденным вероятностям.

9.35. Ежедневная прибыль супермаркета является случайной величиной, распределенной по нормальному закону со средним значением 500 000 и неизвестной дисперсией. На основе наблюдений найдено, что вероятность отклонения от среднего значения в сторону уменьшения или увеличения ежедневной прибыли на 150 000 примерно равна 0,6. Оценить величину среднего квадратического отклонения этой случайной величины и найти вероятность того, что в случайно выбранный день недели прибыль супермаркета превзойдет 700 000.

9.36. Ежедневный расход питьевой воды в районе является случайной величиной, распределенной по нормальному закону со средним значением 2 500 000 и неизвестной дисперсией. На основе наблюдений найдено, что вероятность отклонения от среднего значения в сторону уменьшения или увеличения ежедневного расхода на 450 000 примерно равна 0,8. Оценить величину среднего квадратического отклонения этой случайной величины и найти вероятность того, что в случайно выбранный день недели расход воды превзойдет 2 800 000.

9.37. Случайная величина X распределена экспоненциально с параметром $\mu=3$, случайная величина Y распределена по закону Пуассона с параметром $\mu=2$, эти случайные величины независимы. Найти закон распределения их суммы.

9.38. Случайная величина X распределена экспоненциально с параметром $\mu=1$, случайная величина Y распределена по закону Пуассона с параметром $\mu=4$, эти случайные величины независимы. Найти закон распределения их суммы.

9.39. Независимые случайные величины X и Y распределены равномерно на отрезке $[2; 8]$. Записать плотность вероятностей и функцию распределения их суммы.

9.40. Независимые случайные величины X и Y распределены равномерно на отрезке $[-2; 3]$. Записать плотность вероятностей и функцию распределения их суммы.

9.41. Независимые случайные величины X и Y распределены нормально, причем $M(X)=0$, $D(X)=2$; $M(Y)=-2$, $D(Y)=3$. Записать плотность и функцию распределения их суммы.

9.42. Независимые случайные величины X и Y распределены нормально, причем $M(X)=5$, $D(X)=0$; $M(Y)=-1$, $D(Y)=2$. Записать плотность и функцию распределения их суммы.

9.43. Независимые случайные величины X и Y заданы плотностями распределений: $f_1(x)=\frac{1}{3}e^{-x/3}$ $(0\le x<\infty)$; $f_2(y)=\frac{1}{5}e^{-y/5}$ $(0\le y<\infty)$. Найти плотность распределения их суммы.

9.44. Независимые случайные величины X и Y заданы плотностями распределений: $f_1(x)=\frac{1}{4}e^{-x/4}$ $(0 \le x < \infty)$; $f_2(y)=\frac{1}{2}e^{-y/2}$ $(0 \le y < \infty)$. Найти плотность распределения их суммы.

10. ДВУМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

10.1. Двумерная дискретная величина (X, Y) задана законом распределения:

$Y \backslash X$	−2	−1	0	1
5	0,15	0,06	0,25	0,04
7	0,30	0,10	0,03	0,07

Найти законы распределения X и Y.

10.2. Двумерная дискретная величина (X, Y) задана законом распределения:

$Y \backslash X$	0	1
2	0,12	0,08
3	0	0,12
4	0,04	0,28
5	0,2	0,16

Найти законы распределения X и Y.

10.3. Двумерная дискретная величина (X, Y) задана законом распределения:

$Y \backslash X$	1	3	5
−2	0,125	0,075	0,275
0	0,2	0,05	0,1
2	0,05	0	0,125

Найти условный закон распределения величины X при $Y=-2$. Являются ли независимыми величины X и Y?

10.4. Двумерная дискретная величина (X, Y) задана законом распределения:

$Y \backslash X$	**−1**	**0**	**1**
2	0	0,08	0,22
4	0,24	0,14	0,08
6	0,1	0,04	0,1

Найти условный закон распределения величины Y при $X=1$. Являются ли зависимыми величины X и Y?

10.5. Закон распределения системы двух случайных величин (X, Y) имеет вид:

$Y \backslash X$	**20**	**40**	**60**
10	15α	5α	0
20	α	2α	α
30	5α	α	20α

Найти значение параметра α. Найти математические ожидания m_X и m_Y. Найти средние квадратические отклонения σ_X и σ_Y. Найти коэффициент корреляции r_{XY}. Сделать выводы о зависимости и коррелированности X и Y.

10.6. Закон распределения системы двух случайных величин (X, Y) имеет вид:

$Y \backslash X$	**1**	**5**	**11**
4	10α	3α	5α
6	7α	8α	4α
8	2α	α	10α

Найти значение параметра α. Найти математические ожидания m_X и m_Y. Найти средние квадратические отклонения σ_X и σ_Y. Найти коэффициент корреляции r_{XY}. Сделать выводы о зависимости и коррелированности X и Y.

10.7. Закон распределения системы двух случайных величин (X, Y) имеет вид:

Y \ X	1	3	4	8
–2	0,04	0,02	0,1	0
0	0,08	0,14	0,16	0,04
1	0,06	0,04	0,1	0,22

Найти условный закон распределения X при условии, что $Y=-2$, и условный закон распределения Y при условии, что $X=3$.

10.8. Закон распределения системы двух случайных величин (X, Y) имеет вид:

Y \ X	–6	–3	0	3
5	0,02	0,01	0	0,16
10	0,12	0,07	0,08	0,09
15	0,03	0,1	0,21	0,11

Найти условный закон распределения X при условии, что $Y=15$, и условный закон распределения Y при условии, что $X=3$.

10.9. Задана функция распределения двумерной случайной величины (X, Y): $F(x, y)=(1-e^{-x})(1-e^{-y})$ при $x\geq 0$, $y\geq 0$ и $F(x, y)=0$ при остальных значениях x и y. Найти вероятность того, что в результате испытания X и Y примут значения соответственно $X\leq 2$ и $Y\leq 4$.

10.10. Задана функция распределения двумерной случайной величины (X, Y): $F(x, y)=(1-e^{-2x})(1-e^{-2y})$ при $x\geq 0$, $y\geq 0$ и $F(x, y)=0$ при остальных значениях x и y. Найти вероятность того, что в результате испытания X и Y примут значения соответственно $X\leq 10$ и $Y\leq 1$.

10.11. Дана плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины (X, Y): $f(x, y)=\gamma\sin(4x+4y)$ при $0\leq x\leq \pi/2$, $0\leq y\leq \pi/2$ и $f(x, y)=0$ вне указанного квадрата. Найти параметр γ и функцию распределения $F(x, y)$ этой величины. Вычислить вероятность того, что X и Y примут значения: $X<\pi/4$, $Y<\pi/2$.

10.12. Дана плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины (X, Y): $f(x, y)=\gamma\sin(2x+2y)$ при $0\le x\le\pi/2$, $0\le y\le\pi/2$ и $f(x, y)=0$ вне указанного квадрата. Найти параметр γ и функцию распределения $F(x, y)$ этой величины. Вычислить вероятность того, что X и Y примут значения: $X<\pi/2$, $Y<\pi/6$.

10.13. Плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины (X, Y) равна

$$f(x, y)=\frac{\gamma}{(1+9x^2)(1+4y^2)}.$$

Найти значение параметра γ и вероятность попадания случайной величины в нижнюю полуплоскость.

10.14. Плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины (X, Y) равна

$$f(x, y)=\frac{\gamma}{(1+25x^2)(1+16y^2)}.$$

Найти значение параметра γ и вероятность попадания случайной величины во вторую координатную четверть.

10.15. Найти плотность распределения, если функция распределения имеет вид: $F(x, y)=(1-e^{-4x})(1-e^{-3y})$ при $x\ge 0$, $y\ge 0$ и $F(x, y)=0$ при остальных значениях x и y. Найти маргинальные плотности распределения $f_X(x)$ и $f_Y(y)$. Найти математические ожидания m_X и m_Y.

10.16. Найти плотность распределения, если функция распределения имеет вид: $F(x, y)=(1-e^{-3x})(1-e^{-2y})$ при $x\ge 0$, $y\ge 0$ и $F(x, y)=0$ при остальных значениях x и y. Найти маргинальные плотности распределения $f_X(x)$ и $f_Y(y)$. Найти математические ожидания m_X и m_Y.

10.17. Дана плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины (X, Y): $f(x, y)=\gamma(2x+y)$ при $0\le x\le 3$, $0\le y\le 2$ и $f(x, y)=0$ вне указанного прямоугольника. Найти параметр γ. Вычислить вероятность попадания X и Y

в квадрат $[1, 2]\times[1, 2]$. Найти математические ожидания m_X и m_Y. Найти средние квадратические отклонения σ_X и σ_Y.

10.18. Дана плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины (X, Y): $f(x, y)=\gamma(x+2y)$ при $0\leq x\leq 4$, $0\leq y\leq 5$ и $f(x, y)=0$ вне указанного прямоугольника. Найти параметр γ. Вычислить вероятность попадания X и Y в квадрат $[2, 4]\times[2, 4]$. Найти математические ожидания m_X и m_Y. Найти средние квадратические отклонения σ_X и σ_Y.

10.19. Дана плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины (X, Y): $f(x, y)=\gamma\dfrac{x}{y}$ при $(x, y)\in D$, где D — треугольник, ограниченный прямыми $x=0$, $y=2$, $x+2y=8$, и $f(x, y)=0$ вне указанного треугольника. Найти параметр γ. Найти математические ожидания m_X и m_Y. Найти средние квадратические отклонения σ_X и σ_Y. Найти коэффициент корреляции r_{XY}. Сделать выводы о зависимости и коррелированности X и Y.

10.20. Дана плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины (X, Y): $f(x, y)=\gamma\dfrac{y}{x}$ при $(x, y)\in D$, где D — треугольник, ограниченный прямыми $x=1$, $y=0$, $3x+y=9$, и $f(x, y)=0$ вне указанного треугольника. Найти параметр γ. Найти математические ожидания m_X и m_Y. Найти средние квадратические отклонения σ_X и σ_Y. Найти коэффициент корреляции r_{XY}. Сделать выводы о зависимости и коррелированности X и Y.

11. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

11.1. Вероятность того, что деталь нестандартна, равна 0,1. Найти вероятность того, что среди случайно отобранных 400 деталей относительная частота появления нестандартных деталей отклонится от указанной вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,03.

11.2. Вероятность того, что деталь нестандартна, равна 0,15 независимых испытаний. Найти вероятность того, что среди случайно отобранных 10 000 деталей относительная частота появления события отклонится от указанной вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,001.

11.3. Вероятность появления события A в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что событие A произойдет: а) 750 раз; б) не менее 710 раз.

11.4. Вероятность появления события A в каждом из 500 независимых испытаний равна 0,6. Найти вероятность того, что событие A произойдет: а) 450 раз; б) не более 470 раз.

11.5. Вероятность приема каждого из 100 передаваемых сигналов равна 0,75. Найти вероятность того, что будет принято от 71 до 80 сигналов.

11.6. Вероятность приема каждого из 200 передаваемых сигналов равна 0,5. Найти вероятность того, что будет принято от 100 до 110 сигналов.

11.7. Вероятность рождения мальчика равна 0,514. Определить вероятность того, что доля мальчиков среди 400 новорожденных будет отличаться от вероятности рождения мальчика не более чем на 0,05 в ту или другую сторону.

11.8. Вероятность рождения девочки равна 0,486. Определить вероятность того, что доля девочек среди 1000 новорожденных будет отличаться от вероятности рождения девочки не более чем на 0,05 в ту или другую сторону.

11.9. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти, какое отклонение относительной частоты появления события от его вероятности при 5000 испытаниях можно ожидать с вероятностью 0,9.

11.10. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,3. Найти, какое отклонение относительной частоты появления события от его вероятности при 1000 испытаниях можно ожидать с вероятностью 0,8.

11.11. Сколько раз надо бросить монету, чтобы с вероятностью 0,6 можно было ожидать, что отклонение относительной частоты появлений герба от вероятности 0,5 окажется по абсолютной величине не более 0,01?

11.12. Сколько раз надо бросить монету, чтобы с вероятностью 0,8 можно было ожидать, что отклонение относительной частоты появлений герба от вероятности 0,5 окажется по абсолютной величине не более 0,05?

11.13. Средний вес клубня картофеля равен 130 г. Какова вероятность того, что наугад взятый клубень картофеля весит не более 200 г?

11.14. Средний диаметр яблока равен 75 мм. Какова вероятность того, что наугад взятое яблоко имеет диаметр не более 65 мм?

11.15. Оценить вероятность того, что при 2000 независимых подбрасываниях игрального кубика число появлений шести очков будет не меньше 300.

11.16. Оценить вероятность того, что при 1000 независимых подбрасываниях игрального кубика число появлений четырех очков будет не меньше 200.

11.17. Случайная величина X имеет дисперсию 0,001. Какова вероятность того, что случайная величина X отличается от своего математического ожидания более чем на 0,1?

11.18. Случайная величина X имеет дисперсию 0,02. Какова вероятность того, что случайная величина X отличается от своего математического ожидания более чем на 0,5?

11.19. Дисперсия случайной величины X равна 0,009 и при этом $P=\{|X-MX|\geq\varepsilon\}<0{,}2$. Найти число ε.

11.20. Дисперсия случайной величины X равна 0,01 и при этом $P=\{|X-MX|<\varepsilon\}>0{,}9$. Найти число ε.

11.21. Среднее значение длины детали равно 50 см, а дисперсия равна 0,1. Оценить вероятность того, что изготовленная деталь окажется по своей длине не меньше 49,5 см и не больше 50,5 см.

11.22. Средний вес пакета крупы равен 900 г, а дисперсия равна 0,3. Оценить вероятность того, что произвольно взятый пакет будет весить не меньше 890 г и не больше 910 г.

11.23. Всхожесть семян некоторой культуры равна 0,75. Оценить вероятность того, что из посеянных 1000 семян число взошедших окажется от 700 до 800.

11.24. Всхожесть семян данного растения равна 0,9. Найти вероятность того, что из 900 посаженных семян число проросших между 790 и 830.

11.25. При штамповке пластинок из пластмассы брак составляет 3%. Найти вероятность того, что при проверке партии в 1000 пластинок выявится отклонение от установленного процента брака меньше чем на 1%.

11.26. При печати газет брак составляет 4%. Найти вероятность того, что при проверке партии в 3000 газет выявится отклонение от установленного процента брака меньше чем на 3%.

11.27. Дисперсия каждой из 1000 независимых случайных величин равна 4. Оценить вероятность того, что отклонение среднего арифметического этих величин от среднего арифметического их математических ожиданий по модулю не превзойдет 0,1.

11.28. Дисперсия каждой из 5000 независимых случайных величин равна 1. Оценить вероятность того, что отклонение среднего арифметического этих величин от среднего арифметического их математических ожиданий по модулю не превзойдет 0,01.

11.29. Известно, что дисперсия каждой из данных независимых случайных величин равна 1. Определить число таких величин, при котором вероятность отклонения среднего арифметического этих величин от среднего арифметического их математических ожиданий не более чем на 0,2 превысит 0,8.

11.30. Известно, что дисперсия каждой из данных независимых случайных величин равна 4. Определить число таких величин, при котором вероятность отклонения среднего арифметического этих величин от среднего арифметического их математических ожиданий не более чем на 0,5 превысит 0,9.

11.31. Сколько раз нужно измерить данную величину, истинное значение которой равно C, чтобы с вероятностью не менее 0,92 можно было утверждать, что среднее арифметическое этих измерений отличается от C в ту или иную сторону меньше чем на 2, если среднее квадратическое отклонение каждого измерения меньше 9.

11.32. Сколько раз нужно измерить данную величину, истинное значение которой равно C, чтобы с вероятностью не менее 0,97 можно было утверждать, что среднее арифметическое этих измерений отличается от C в ту или иную сторону меньше чем на 5, если среднее квадратическое отклонение каждого измерения меньше 1.

11.33. Производство дает 1% брака. Какова вероятность того, что из взятых на исследование 1500 изделий выбракованных будет не более 15?

11.34. Производство дает 4% брака. Какова вероятность того, что из взятых на исследование 1000 изделий выбракованных будет не более 40?

11.35. Отдел технического контроля проверяет изделия на брак. Вероятность того, что изделие бракованное, равна 0,06. Найти с вероятностью 0,95 границы, в которых будет заключено число бракованных изделий в партии из 575 деталей.

11.36. Игральный кубик подбрасывают 100 раз. Найти с вероятностью 0,99 границы, в которых будет заключено число выпадений единицы.

11.37. Среднее количество вызовов наладчиков станков, поступающих в течение часа в диспетчерскую, равно 11. Оценить вероятность того, что в течение часа поступит вызовов: не менее 25; более 5.

11.38. Среднее количество телеграмм, приходящих в течение часа в почтовое отделение, равно 16. Оценить вероятность того, что в течение часа поступит телеграмм: не более 22; менее 10.

11.39. Электрическая подстанция обслуживает сеть, к которой подключены 5000 ламп. Вероятность включения каждой лампы в определенный промежуток времени равна 0,4. Оценить вероятность того, что в указанное время будут включаться от 1500 до 1800 ламп.

11.40. Электрическая подстанция обслуживает сеть, к которой подключено 6000 бытовых приборов. Вероятность того, что прибор будет работать в определенный промежуток времени, равна 0,2. Оценить вероятность того, что в указанное время будут работать от 1000 до 1200 приборов.

XIII. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

1. ТОЧЕЧНЫЕ ОЦЕНКИ

1.1. В генеральной совокупности приблизительно 20% респондентов относятся к категории A, 10% — к категории B, 40% — к категории C, остальные — к категории K. Какую из указанных выборок можно считать репрезентативной?

	A	*B*	*C*	*K*
Выборка № 1	44	15	61	30
Выборка № 2	22	11	39	28
Выборка № 3	10	20	30	40

1.2. В генеральной совокупности приблизительно 40% респондентов относятся к категории A, 30% — к категории B, 20% — к категории C, остальные — к категории K. Какую из указанных выборок можно считать репрезентативной?

	A	*B*	*C*	*K*
Выборка № 1	240	230	220	310
Выборка № 2	15	20	30	45
Выборка № 3	196	157	98	49

1.3. Дана выборка $(-1, -2, -3, 0, 1)$.

а) Найти распределение относительных частот, построить полигон частот и полигон относительных частот;

б) построить график эмпирической функции распределения;

в) найти выборочное среднее, моду, медиану;

г) найти выборочную дисперсию, исправленную дисперсию, выборочное и исправленное средние квадратические отклонения;

д) найти наименьшую и наибольшую варианты, размах выборки.

1.4. Дана выборка $(3, -2, 5, -4, 0)$.

а) Найти распределение относительных частот, построить полигон частот и полигон относительных частот;

б) построить график эмпирической функции распределения;

в) найти выборочное среднее, моду, медиану;

г) найти выборочную дисперсию, исправленную дисперсию, выборочное и исправленное средние квадратические отклонения;

д) найти наименьшую и наибольшую варианты, размах выборки.

1.5. Дана выборка $(1, 2, 0, -5, -3, -5, 4, 3, -5, 0)$.

а) Найти распределение относительных частот, построить полигон частот и полигон относительных частот;

б) построить график эмпирической функции распределения;

в) найти выборочное среднее, моду, медиану;

г) найти выборочную дисперсию, исправленную дисперсию, выборочное и исправленное средние квадратические отклонения;

д) найти наименьшую и наибольшую варианты, размах выборки.

1.6. Дана выборка $(2, -2, 2, -2, -3, 1, 4, 0, 2, 1)$.

а) Найти распределение относительных частот, построить полигон частот и полигон относительных частот;

б) построить график эмпирической функции распределения;

в) найти выборочное среднее, моду, медиану;

г) найти выборочную дисперсию, исправленную дисперсию, выборочное и исправленное средние квадратические отклонения;

д) найти наименьшую и наибольшую варианты, размах выборки.

1.7. Дана выборка (1, 4, 3, 5, 0, 7, 2, 3, 5, 7, 0, 11, 2, 7, 8, 10, 0, 2, 7,7).

а) Найти распределение относительных частот, построить полигон частот, полигон относительных частот, узнать, является распределение унимодальным или мультимодальным;

б) построить график эмпирической функции распределения;

в) найти моду, медиану, выборочное среднее;

г) найти выборочную дисперсию, исправленную дисперсию, выборочное и исправленное средние квадратические отклонения;

д) найти наименьшую и наибольшую варианты, размах выборки.

1.8. Дана выборка (1, –4, –3, 0, 0, –1, –2, 3, –5, 1, 0, 1, –2, 1, –3, 1, 0, 2, 3,3).

а) Найти распределение относительных частот, построить полигон частот, полигон относительных частот, узнать, является распределение унимодальным или мультимодальным;

б) построить график эмпирической функции распределения;

в) найти моду, медиану, выборочное среднее;

г) найти выборочную дисперсию, исправленную дисперсию, выборочное и исправленное средние квадратические отклонения;

д) найти наименьшую и наибольшую варианты, размах выборки.

1.9. Дана выборка (1, 4, 3, 5, 0, 7, 2, 3, 5, 7, 0, 11, 2, 7, 8, 10, 0, 2, 7, 7). Сгруппировать данные, получить сгруппированный ряд распределения, для которого:

а) найти распределение относительных частот, построить полигон частот, полигон относительных частот;

б) построить график эмпирической функции распределения;

в) найти моду, медиану, выборочное среднее;

г) найти выборочную дисперсию, исправленную дисперсию, выборочное и исправленное средние квадратические отклонения.

1.10. Дана выборка (1, −4, −3, 0, 0, −1, −2, 3, −5, 1, 0, 1, −2, 1, −3, 1, 0, 2, 3, 3). Сгруппировать данные, получить сгруппированный ряд распределения, для которого:

а) найти распределение относительных частот, построить полигон частот, полигон относительных частот;

б) построить график эмпирической функции распределения;

в) найти моду, медиану, выборочное среднее;

г) найти выборочную дисперсию, исправленную дисперсию, выборочное и исправленное средние квадратические отклонения.

1.11. Задано статистическое распределение выборки.

Варианты x_i	−13	−10	−6	0
Частоты n_i	4	2	1	3

Найти:

а) эмпирическую функцию распределения (построить график);

б) точечные оценки параметров распределения: выборочное среднее, исправленную дисперсию, исправленное среднеквадратическое отклонение.

1.12. Задано статистическое распределение выборки.

Варианты x_i	0	2	8	10
Частоты n_i	1	3	4	2

Найти:

а) эмпирическую функцию распределения (построить график);

б) точечные оценки параметров распределения: выборочное среднее, исправленную дисперсию, исправленное среднеквадратическое отклонение.

1.13. Дана выборка.

Частичный интервал	0–4	4–8	8–12	12–16	16–20
Сумма частот (частота интервала)	3	8	11	6	2

а) Построить гистограммы частот и относительных частот;

б) оценить математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

1.14. Дана выборка.

Частичный интервал	–3...0	0–3	3–6	6–9	9–12	12–15	15–18
Сумма частот (частота интервала)	2	6	5	7	3	1	1

а) Построить гистограммы частот и относительных частот;

б) оценить математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

1.15. Для распределения

Варианты x_i	10	15	20	25	30	35	40	45	50
Частоты n_i	5	14	37	73	104	81	28	9	2

по выравнивающим частотам построить нормальную (теоретическую) кривую и полигон наблюдаемых частот.

1.16. Для распределения

Варианты x_i	0	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Частоты n_i	2	3	8	20	50	54	14	9	2	1

по выравнивающим частотам построить нормальную (теоретическую) кривую и полигон наблюдаемых частот.

1.17. После измерения одним и тем же прибором (не имеющим систематических ошибок) некоторой физической константы получили результаты: 22, 19, 20, 21, 18, 23. Найти:

а) выборочную среднюю результатов измерения;

б) выборочную и исправленную дисперсии ошибок прибора.

1.18. После измерения одним и тем же прибором (не имеющим систематических ошибок) некоторой физической константы получили результаты: 1,12; 0,98; 1,03; 1,09. Найти:

а) выборочную среднюю результатов измерения;

б) выборочную и исправленную дисперсии ошибок прибора.

1.19. При испытаниях одинаковых ламп в сетях с нестабильным значением напряжения были получены следующие значения случайной величины (отношение срока службы лампы к номинальному сроку): 0,56; 0,64; 0,59; 0,68; 0,74; 0,75; 0,83; 0,91; 0,77; 0,98; 0,65; 0,82; 1,04; 1,12; 1,64; 1,72; 1,76; 1,44; 1,25; 1,83. Сгруппировав данные, найти:

а) выборочную среднюю результатов наблюдений, медиану и моду;

б) выборочную и исправленную дисперсии исследуемой величины.

1.20. При испытаниях одинаковых ламп в сетях с нестабильным значением напряжения были получены следующие значения случайной величины (количество света в процентах от номинального количества): 116; 92; 105; 101; 87; 92; 99; 89; 106; 102; 105; 96; 93; 95; 112; 110; 101; 111; 86; 85. Сгруппировав данные, найти:

а) выборочную среднюю результатов наблюдений, медиану и моду;

б) выборочную и исправленную дисперсии исследуемой величины.

2. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ

2.1. Объем случайной выборки, необходимый для оценки нормальной средней со средним квадратическим отклонением $\sigma=2$, равен 120. Определить надежность (доверительную вероятность) γ при заданной точности $\Delta=0{,}8$.

2.2. Объем случайной выборки, необходимый для оценки нормальной средней со средним квадратическим отклонением $\sigma=1$, равен 410. Определить надежность (доверительную вероятность) γ при заданной точности $\Delta=0{,}5$.

2.3. Объем случайной выборки, необходимый для оценки нормальной средней со средним квадратическим отклонением $\sigma=2{,}5$, равен 20. Определить надежность (доверительную вероятность) γ при заданной точности $\Delta=0{,}75$.

2.4. Объем случайной выборки, необходимый для оценки нормальной средней со средним квадратическим отклонением $\sigma=1{,}2$, равен 10. Определить надежность (доверительную вероятность) γ при заданной точности $\Delta=0{,}65$.

2.5. Объем случайной выборки, необходимый для оценки нормальной средней с выборочным средним квадратическим отклонением $s=1{,}85$, равен 25. Определить надежность (доверительную вероятность) γ при заданной точности $\Delta=0{,}75$.

2.6. Объем случайной выборки, необходимый для оценки нормальной средней с выборочным средним квадратическим отклонением $s=2{,}15$, равен 16. Определить надежность (доверительную вероятность) γ при заданной точности $\Delta=0{,}65$.

2.7. Объем случайной выборки, необходимый для оценки нормальной средней с выборочным средним квадратическим отклонением $s=3{,}2$, равен 250. Определить надежность (доверительную вероятность) γ при заданной точности $\Delta=0{,}5$.

2.8. Объем случайной выборки, необходимый для оценки нормальной средней с выборочным средним квадратическим отклонением $s=1{,}6$, равен 160. Определить надежность (доверительную вероятность) γ при заданной точности $\Delta=0{,}6$.

2.9. Каков должен быть объем случайной выборки, необходимый для оценки нормальной средней со средним квадратическим отклонением $\sigma = 1$ с заданной надежностью 0,95 и точностью 0,62?

2.10. Каков должен быть объем случайной выборки, необходимый для оценки нормальной средней со средним квадратическим отклонением $\sigma = 2$ с заданной надежностью 0,9 и точностью 0,84?

2.11. Каков должен быть объем случайной выборки, необходимый для оценки нормальной средней с выборочным средним квадратическим отклонением $s = 1$ с заданной надежностью 0,95 и точностью 0,64?

2.12. Каков должен быть объем случайной выборки, необходимый для оценки нормальной средней с выборочным средним квадратическим отклонением $s = 1$ с заданной надежностью 0,9 и точностью 0,43?

2.13. С вероятностью $\gamma = 0{,}99$ найти границы доверительного интервала для математического ожидания a нормально распределенной случайной величины X, если $n = 8$, $\overline{x} = 26$ и $s = 2$.

2.14. С вероятностью $\gamma = 0{,}95$ найти границы доверительного интервала для математического ожидания a нормально распределенной случайной величины X, если $n = 12$, $\overline{x} = -41$ и $s = 3$.

2.15. С вероятностью $\gamma = 0{,}95$ найти границы доверительного интервала для математического ожидания a нормально распределенной случайной величины X, если $n = 100$, $\overline{x} = -0{,}5$ и $s = 1{,}25$.

2.16. С вероятностью $\gamma = 0{,}99$ найти границы доверительного интервала для математического ожидания a нормально распределенной случайной величины X, если $n = 200$, $\overline{x} = 1{,}5$ и $s = 1{,}05$.

2.17. С вероятностью $\gamma=0{,}9$ найти нижнюю границу доверительного интервала для генерального среднего квадратического отклонения σ случайной величины X, $n=8$ и $s=2$.

2.18. С вероятностью $\gamma=0{,}95$ найти верхнюю границу доверительного интервала для генерального среднего квадратического отклонения σ случайной величины X, $n=10$ и $s=3$.

2.19. Определить доверительную вероятность γ интервальной оценки математического ожидания a случайной величины X, найденной по выборке с характеристиками: $n=9$, $\bar{x}=3$, $s=3$, если точность оценки равна $\Delta=1{,}5$.

2.20. Определить доверительную вероятность γ интервальной оценки математического ожидания a случайной величины X, найденной по выборке с характеристиками: $n=9$, $\bar{x}=6$, $s=2$, если точность оценки равна $\Delta=3{,}25$.

2.21. Определить доверительную вероятность γ интервальной оценки генеральной дисперсии σ^2, случайной величины X, если верхняя граница интервала равна 24,21, а $n=16$ и $s=2$.

2.22. Определить доверительную вероятность γ интервальной оценки генеральной дисперсии σ^2, случайной величины X, если верхняя граница интервала равна 24,21, а $n=25$ и $s=2$.

2.23. По сгруппированным данным наблюдений случайной величины построить доверительный интервал для ее математического ожидания с уровнем надежности 0,95.

Интервалы	(−8, −2)	(−2, 4)	(4, 6)	(6, 12)	(12, 18)
Число наблюдений	12	28	43	19	15

2.24. По сгруппированным данным наблюдений случайной величины построить доверительный интервал для ее математического ожидания с уровнем надежности 0,99.

Интервалы	(−10, −5)	(−5, 0)	(0, 5)	(5, 10)	(10, 15)
Число наблюдений	17	36	51	26	20

2.25. Из генеральной нормально распределенной совокупности извлечена выборка

Варианта	−5	−4	−3	−2	−1	0
Частота	1	1	2	2	3	1

Оценить с надежностью 0,95:
а) математическое ожидание по выборочной средней;
б) дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

2.26. Из генеральной нормально распределенной совокупности извлечена выборка

Варианта	−3	−2	−1	0	1	2
Частота	2	1	2	2	2	1

Оценить с надежностью 0,9:
а) математическое ожидание по выборочной средней;
б) дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

2.27. Измерения некоторой величины дали результаты: 18, 16, 16, 17, 18, 18, 18, 15, 16. Известно, что ошибки измерения имеют нормальный закон распределения, систематическая ошибка измерения отсутствует. С надежностью 0,9 построить доверительный интервал истинного значения измеряемой величины, если:
а) дисперсия ошибки измерения равна 1,5;
б) дисперсия ошибки измерения неизвестна.

2.28. Измерения некоторой величины дали результаты: −9, −10, −10, −10, −9, −8, −8, −10, −9. Известно, что ошибки измерения имеют нормальный закон распределения, систематическая ошибка измерения отсутствует. С надежностью 0,99 построить доверительный интервал истинного значения измеряемой величины, если:

а) дисперсия ошибки измерения равна 1,25;

б) дисперсия ошибки измерения неизвестна.

2.29. Измерения некоторой величины дали результаты: –1,3; –1,2; –0,5; –0,8. Известно, что ошибки измерения имеют нормальный закон распределения. С надежностью 0,95 построить доверительный интервал для дисперсии.

2.30. Измерения некоторой величины дали результаты: 1,4; 1,3; 0,9; 1,1. Известно, что ошибки измерения имеют нормальный закон распределения. С надежностью 0,99 построить доверительный интервал для дисперсии.

2.31. Измерения некоторой величины дали результаты: 1,3; 0,9; 1,4; 1,1; 1,2; 1,1; 0,8; 1,3; 0,9. Известно, что ошибки измерения имеют нормальный закон распределения. С надежностью 0,99 построить доверительный интервал для дисперсии измеряемой величины.

2.32. Измерения некоторой величины дали результаты: –0,5; –0,8; –1,3; –1,2; –1,1; –0,9; –0,7; –0,6; –0,8. Известно, что ошибки измерения имеют нормальный закон распределения. С надежностью 0,95 построить доверительный интервал для дисперсии измеряемой величины.

2.33. Штангенциркулем с ценой деления 0,1 мм измеряют диаметр стержня. Найти полную погрешность измерения по результатам замеров (мм): 8,3; 8,4; 8,3 — и указать диаметр.

2.34. Штангенциркулем с ценой деления 0,5 мм измеряют длину пластины. Найти полную погрешность измерения по результатам замеров (мм): 18,2; 18,4; 18,3 — и указать длину.

2.35. Весами с ценой деления 10 г взвешивают пакет муки. Найти полную погрешность взвешивания по результатам (кг): 0,51; 0,52; 0,49; 0,5; 0,51 — и записать массу пакета.

2.36. Весами с ценой деления 100 г взвешивают мешок риса. Найти полную погрешность взвешивания по результатам (кг): 3,2; 2,9; 3,1; 3,0; 2,9 — и записать массу мешка.

3. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ

3.1. В задаче радиолокационного обнаружения цели проверяется основная гипотеза H_0, утверждающая, что цель своя. Альтернативой служит гипотеза H_1, утверждающая, что цель чужая. Описать ошибки первого и второго рода. Каковы возможные последствия этих ошибок?

3.2. В задаче обнаружения бракованного изделия проверяется основная гипотеза H_0, утверждающая, что изделие годное. Альтернативой служит гипотеза H_1, утверждающая, что изделие бракованное. Описать ошибки первого и второго рода. Каковы возможные последствия этих ошибок?

3.3. На уровне значимости $\alpha=0{,}05$ проверить основную гипотезу H_0, утверждающую, что данная выборка принадлежит генеральной совокупности X, распределенной равномерно на [0, 1].

№ интервала	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число попаданий	198	195	196	202	211	189	193	206	191	199

3.4. На уровне значимости $\alpha=0{,}05$ проверить основную гипотезу H_0, утверждающую, что данная выборка принадлежит генеральной совокупности X, распределенной равномерно на [0, 1].

№ интервала	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число попаданий	90	93	91	97	88	84	101	106	87	95

3.5. В 45 независимых испытаниях с неизвестной вероятностью успеха p в каждом испытании найдена относительная частота 0,37. На уровне значимости $\alpha=0{,}05$ проверить гипотезу о соотношении истинной и предполагаемой вероятности $p>0{,}4$.

3.6. В 55 независимых испытаниях с неизвестной вероятностью успеха p в каждом испытании найдена относительная частота 0,71. На уровне значимости $\alpha=0{,}05$ проверить гипотезу о соотношении истинной и предполагаемой вероятности $p<0{,}7$.

3.7. Над случайной величиной X проделано 45 независимых наблюдений, а над случайной величиной Y — 60 независимых наблюдений. При известных дисперсиях $D(X)=0{,}16$ и $D(Y)=0{,}25$ проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий a_1 и a_2.

3.8. Над случайной величиной X проделано 70 независимых наблюдений, а над случайной величиной Y — 75 независимых наблюдений. При известных дисперсиях $D(X)=0{,}09$ и $D(Y)=1{,}21$ проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий a_1 и a_2.

3.9. Над случайной величиной X проделано 120 независимых наблюдений, а над случайной величиной Y — 315 независимых наблюдений. При неизвестных дисперсиях проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий a_1 и a_2.

3.10. Над случайной величиной X проделано 350 независимых наблюдений, а над случайной величиной Y — 210 независимых наблюдений. При неизвестных дисперсиях проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий a_1 и a_2.

3.11. По двум независимым выборкам $n_x=9$ и $n_y=10$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние $\overline{x}=2{,}43$ и $\overline{y}=2{,}31$. Генеральные дисперсии известны: $D(X)=0{,}36$ и $D(Y)=0{,}25$.

При уровне значимости $\alpha=0{,}01$ проверить нулевую гипотезу H_0: $M(X)=M(Y)$ о равенстве средних при конкурирующей гипотезе H_1 об их неравенстве.

3.12. По двум независимым выборкам $n_x=25$ и $n_y=20$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние $\bar{x}=1{,}33$ и $\bar{y}=1{,}37$. Генеральные дисперсии известны: $D(X)=0{,}09$ и $D(Y)=0{,}16$. При уровне значимости $\alpha=0{,}01$ проверить нулевую гипотезу H_0: $M(X)=M(Y)$ о равенстве средних при конкурирующей гипотезе H_1 об их неравенстве.

4. ЭЛЕМЕНТЫ КОРРЕЛЯЦИОННОГО И РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА

4.1. Выборка двумерной случайной величины имеет вид:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	3,8	0,8	3,9	7,5	2,2	1,3	1,9	0,9	2,1	6,2	4,8

Построить диаграмму рассеяния и сделать вывод о характере корреляционной зависимости координат.

4.2. Выборка двумерной случайной величины имеет вид:

x	−1,1	−0,3	−5,6	−7,2	−3,6	−1,5	−3,3	−6,2	−0,9	−1,5	−2,5
y	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

Построить диаграмму рассеяния и сделать вывод о характере корреляционной зависимости координат.

4.3. Выборка двумерной случайной величины имеет вид:

x	0,8	1,1	2,5	6,4	−5,4	−2	4,9
y	1,7	1,0	−1,9	−13,2	16,4	9,7	−8,1
x	−7,6	1	1,9	−1,5	6,1	6,2	0,7
y	22,6	1,9	0,5	7,4	−10,4	−8,6	1,2

Построить диаграмму рассеяния и сделать вывод о характере корреляционной зависимости координат.

4.4. Выборка двумерной случайной величины имеет вид:

x	1,9	0,3	2,6	7	–5,6	–1,5	3,3
y	–1,8	–0,8	3,3	19	–22,2	–13	11,9
x	–10,2	0,9	1,5	–2	5,3	6,5	1,9
y	–30,9	–2,1	–0,2	–9,8	15,1	12,6	–1,2

Построить диаграмму рассеяния и сделать вывод о характере корреляционной зависимости координат.

4.5. Исследование зависимости между среднемесячными доходами X на человека в семье (тыс. руб.) и расходами Y на покупку кондитерских изделий (в процентах от бюджета семьи) представлено в таблице:

x	9,6	7,6	10,8	8,4	6,8	9,2	6,8	9,6
y	7,5	6,8	7,8	7,1	6,4	7,3	6,6	7,5
x	10,0	7,6	10,4	8,0	7,6	9,2	8,8	
y	7,5	6,5	7,7	6,9	6,7	7,2	7,0	

Построить диаграмму рассеяния и сделать вывод о характере расходов.

4.6. Исследование зависимости между среднемесячными доходами X на человека в семье (тыс. руб.) и расходами Y на покупку макаронных изделий (в процентах от бюджета семьи) представлено в таблице:

x	9,5	7,5	10,5	8,5	6,8	9,2	6,8	9,5
y	2,8	7,5	0,4	5,1	9,2	3,5	9,2	2,8
x	10,0	7,5	10,5	8,0	7,5	9,2	8,8	
y	1,6	7,5	0,4	6,3	7,5	3,5	4,4	

Построить диаграмму рассеяния и сделать вывод о характере расходов.

4.7. Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X по следующим данным измерений:

x	0	2,5	5	7,5	10	12,5
y	–3	0	3	6	9	12

4.8. Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X по следующим данным измерений:

x	−5	−2	1	3	5	7	9
y	21	10	0	−8	−15	−23	−30

4.9. Используя распределение случайных признаков x и y:

а) изобразить точки на координатной плоскости;

б) найти выборочный коэффициент корреляции и сделать вывод о степени связи;

в) составить выборочное уравнение прямой линии регрессии y на x.

x	−2	−1	0	1	2	3	4
y	5,3	2,4	−0,5	−4,3	−8,1	−10,2	−13,6

4.10. Используя распределение случайных признаков x и y:

а) изобразить точки на координатной плоскости;

б) найти выборочный коэффициент корреляции и сделать вывод о степени связи;

в) составить выборочное уравнение прямой линии регрессии y на x.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−6,1	−4,0	−2,4	0,4	2,6	4,9	6,6

4.11. Используя распределение случайных признаков x и y:

а) изобразить точки на координатной плоскости;

б) найти выборочный коэффициент корреляции и сделать вывод о степени связи;

в) составить выборочное уравнение прямой линии регрессии y на x.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	−12	−11	−10	−8	−7	−5	−4	−3	−3	−1

4.12. Используя распределение случайных признаков x и y:

а) изобразить точки на координатной плоскости;

б) найти выборочный коэффициент корреляции и сделать вывод о степени связи;

в) составить выборочное уравнение прямой линии регрессии y на x.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0	2	5	6	8	8	9	10	10	12

4.13. Используя распределение случайных признаков x и y:

а) изобразить точки на координатной плоскости;

б) найти выборочный коэффициент корреляции и сделать вывод о степени связи;

в) составить выборочное уравнение прямой линии регрессии y на x.

x	3,5	4,1	4,9	5,3	5,3	6,4	7,2
y	0,4	1,5	2,5	3,5	4,6	5,5	6,5
x	7,5	7,9	8,9	9,1	10,6	11	11,1
y	7,5	8,4	9,5	10,7	11,7	13	13,5

4.14. Используя распределение случайных признаков x и y:

а) изобразить точки на координатной плоскости;

б) найти выборочный коэффициент корреляции и сделать вывод о степени связи;

в) составить выборочное уравнение прямой линии регрессии y на x.

x	0,4	1,4	2,3	3,4	4,5	5,5	6,4
y	−0,5	0,1	0,9	1,3	4,3	2,4	3,2
x	7,6	8,5	9,4	10,6	11,8	13,1	13,6
y	3,5	3,9	4,9	5,1	5,6	6	6,1

4.15. Используя таблицу распределения случайных признаков x и y, найти:

а) выборочный коэффициент корреляции (сделать вывод о степени связи);

б) выборочное уравнение прямой линии регрессии y на x.

$y \backslash x$	−6	−3	0	3	6
1	2	—	1	1	2
2	1	1	—	1	—
3	1	2	2	—	1
4	—	1	1	2	1

4.16. Используя таблицу распределения случайных признаков x и y, найти:

а) выборочный коэффициент корреляции (сделать вывод о степени связи);

б) выборочное уравнение прямой линии регрессии y на x.

$y \backslash x$	1	2	3	4	5
−4	—	1	2	1	1
−2	1	1	—	2	—
0	2	—	1	1	1
2	1	2	1	—	2

4.17. Используя таблицу распределения случайных признаков x и y, найти:

а) выборочный коэффициент корреляции (сделать вывод о степени связи);

б) выборочное уравнение прямой линии регрессии y на x.

$y \backslash x$	−4	−2	0	1	2
−2	6	4	—	—	—
−1	8	—	10	—	—
0	—	—	32	3	9
1	—	—	4	12	6
2	—	—	—	1	5

4.18. Используя таблицу распределения случайных признаков x и y, найти:

а) выборочный коэффициент корреляции (сделать вывод о степени связи);

б) выборочное уравнение прямой линии регрессии y на x.

y \ x	−2	−1	0	1	2
−3	5	7	—	—	—
−1	5	—	—	—	—
0	—	11	31	3	—
2	—	—	3	11	2
3	—	—	10	8	4

4.19. Проведены парные измерения производительности труда Y в зависимости от уровня механизации работ X для 25 промышленных предприятий области. В результате получен выборочный коэффициент корреляции $r=0{,}49$.

а) В условиях двусторонней альтернативы найти критическое значение уровня значимости α_0 такое, что при $\alpha<\alpha_0$ будет приниматься гипотеза о равенстве генерального коэффициента корреляции полученному;

б) для $\alpha=0{,}05$ и правосторонней альтернативы найти критическое значение $r_{кр}$ такое, что при $r>r_{кр}$ гипотеза о равенстве генерального коэффициента корреляции полученному будет отвергаться в пользу альтернативной гипотезы.

4.20. Проведены парные измерения заболеваемости населения Y в зависимости от уровня загрязнения воздуха X для 16 районов области. В результате получен выборочный коэффициент корреляции $r=0{,}51$.

а) В условиях двусторонней альтернативы найти критическое значение уровня значимости α_0 такое, что при $\alpha<\alpha_0$ будет приниматься гипотеза о равенстве генерального коэффициента корреляции полученному;

б) для $\alpha=0{,}005$ и левосторонней альтернативы найти критическое значение $r_{кр}$ такое, что при $r<r_{кр}$ гипотеза о равенстве генерального коэффициента корреляции полученному будет отвергаться в пользу альтернативной гипотезы.

4.21. В таблице представлены результаты измерений роста X (см) и веса Y (кг) 100 мужчин:

X \ Y	[55, 65)	[65, 75)	[75, 85)	[85, 95)	n_i
[155, 165)	3	11	8	2	24
[165, 175)	4	16	18	8	46
[175, 185)	1	8	12	9	30
n_j	8	35	38	19	100

а) Вычислить выборочный коэффициент корреляции;

б) проверить гипотезу о значимости корреляционной связи.

4.22. В таблице представлены результаты измерений роста X (см) и веса Y (кг) 100 спортсменок:

X \ Y	[50, 55)	[55, 60)	[60, 65)	[65, 70)	n_i
[150, 160)	7	12	10	1	30
[160, 170)	7	19	21	3	50
[170, 180)	2	3	8	7	20
n_j	16	34	39	11	100

а) Вычислить выборочный коэффициент корреляции;

б) проверить гипотезу о значимости корреляционной связи.

4.23. Факторный и результативный признаки представлены в таблице:

ФП	80	85	72	85	80	88	95	82	90	100
РП	5	5	5	6	6	6	6	6	7	7
ФП	92	106	95	90	120	115	100	120	110	100
РП	7	7	7	8	8	8	9	9	9	9

а) Сгруппировать факторный и результативный признаки, построить корреляционную таблицу, для каждой строки рассчитать средние значения $\bar{y}_j$ результативного признака Y, соответствующие определенному значению признака-фактора X;

б) сделать предварительный вывод о форме зависимости случайных величин;

в) вычислить выборочный коэффициент корреляции Пирсона для группированной корреляционной таблицы;

г) проверить гипотезу о наличии корреляции.

4.24. Факторный и результативный признаки представлены в таблице:

ФП	40	35	48	34	40	32	25	28	30	20
РП	10	10	10	10	10	10	11	11	11	11
ФП	28	14	25	15	9	5	17	13	10	14
РП	11	12	12	13	13	13	14	14	14	14

а) Сгруппировать факторный и результативный признаки, построить корреляционную таблицу, для каждой строки рассчитать средние значения $\overline{y}_j$ результативного признака Y, соответствующие определенному значению признака-фактора X;

б) сделать предварительный вывод о форме зависимости случайных величин;

в) вычислить выборочный коэффициент корреляции Пирсона для группированной корреляционной таблицы;

г) проверить гипотезу о наличии корреляции.

XIV. УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

1. РАЗНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ

Найти общее решение $u(x, y)$ уравнения первого порядка. Сделать проверку.

1.1. $\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.2. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=0.$

1.3. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-2y.$

1.4. $\dfrac{\partial u}{\partial y}=5x.$

1.5. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=5x+3y-2.$

1.6. $\dfrac{\partial u}{\partial y}=2x+3y-5.$

1.7. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=3y+6x^2.$

1.8. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x^2+3y^2-xy.$

1.9. $\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^2y^2+4x^3y^3-6x+4y.$

1.10. $\dfrac{\partial u}{\partial y}=3x^3y^2-2x^2y+5.$

1.11. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=x^2\operatorname{ctg} y-y^2\operatorname{ctg} 2x.$

1.12. $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\sqrt[4]{xy}+3x\sqrt[3]{y}.$

Найти общее решение $u(x, y)$ уравнения второго порядка. Сделать проверку.

1.13. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=4.$

1.14. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=0.$

1.15. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=5y.$

1.16. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=-3x+2.$

1.17. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 4x - 2y - 3.$

1.18. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1 - 5x + 7y.$

1.19. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x - y.$

1.20. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x + y.$

1.21. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4x + 2y.$

1.22. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -3x - 6y.$

1.23. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 43x - 15xy^4 + 6y^2 + 3.$

1.24. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x^3 y - 9x^2 y^2 + 6xy^4 + 3x^2 - 2y.$

1.25. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (x - 2y^2)^2.$

1.26. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (3x^2 + 4y^3)^2.$

Определить тип и найти общее решение $u(x, y)$ уравнения. Сделать проверку.

1.27. $u_{xx} - 2u_{xy} - 63u_{yy} = 0.$

1.28. $u_{xx} - 2u_{xy} - 72u_{yy} = 0.$

1.29. $u_{xx} - u_{xy} - 42u_{yy} = 0.$

1.30. $u_{xx} + u_{xy} - 42u_{yy} = 0.$

1.31. $u_{xx} - 3u_{xy} - 54u_{yy} = 0.$

1.32. $u_{xx} + 2u_{xy} - 48u_{yy} = 0.$

1.33. $u_{xx} - 2u_{xy} - 8u_{yy} = 0.$

1.34. $u_{xx} + 3u_{xy} - 10u_{yy} = 0.$

1.35. $u_{xx} + 10u_{xy} + 25u_{yy} = 0.$

1.36. $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} = 0.$

1.37. $4u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} = 0.$

1.38. $16u_{xx} + 8u_{xy} + u_{yy} = 0.$

1.39. $u_{xx} - 10u_{xy} + 26u_{yy} = 0.$

1.40. $u_{xx} + 6u_{xy} + 10u_{yy} = 0.$

1.41. $u_{xx} + 12u_{xy} + 40u_{yy} = 0.$

1.42. $u_{xx} - 8u_{xy} + 32u_{yy} = 0.$

2. ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Найти решение задачи Коши. Сделать проверку.

2.1. $u_{tt} = 2u_{xx},\ u|_{t=0} = x^2,\ u_t|_{t=0} = 6x.$

2.2. $u_{tt} = u_{xx},\ u|_{t=0} = -2x^2 + x,\ u_t|_{t=0} = 2x + 5.$

2.3. $u_{tt} = 3u_{xx},\ u|_{t=0} = 3x^2 - 3x,\ u_t|_{t=0} = x + 6.$

2.4. $u_{tt} = 4u_{xx},\ u|_{t=0} = x^2 + 2x + 5,\ u_t|_{t=0} = x - 7.$

2.5. $u_{tt} = 5u_{xx},\ u|_{t=0} = 4x^2 - x + 3,\ u_t|_{t=0} = -2x + 20.$

2.6. $u_{tt} = 6u_{xx},\ u|_{t=0} = -x^2 + 4x,\ u_t|_{t=0} = 2x + 2.$

Решить первую смешанную задачу на отрезке. Сделать проверку.

2.7. $u_{tt}=u_{xx},\ x\in(0,\ 4),\ t\in(0,\ \infty);$

$u|_{t=0}=x(4-x),\ u_t|_{t=0}=0,\ u|_{x=0}=u|_{x=4}=0.$

2.8. $u_{tt}=4u_{xx},\ x\in(0,\ 1),\ t\in(0,\ \infty);$

$u|_{t=0}=x(1-x),\ u_t|_{t=0}=0,\ u|_{x=0}=u|_{x=1}=0.$

2.9. $u_{tt}=9u_{xx},\ x\in(0,\ 2),\ t\in(0,\ \infty);$

$u|_{t=0}=x(2-x),\ u_t|_{t=0}=0,\ u|_{x=0}=u|_{x=2}=0.$

2.10. $u_{tt}=16u_{xx},\ x\in(0,\ 5),\ t\in(0,\ \infty);$

$u|_{t=0}=x(5-x),\ u_t|_{t=0}=0,\ u|_{x=0}=u|_{x=5}=0.$

Решить первую смешанную задачу на отрезке.

2.11. $u_{tt}=u_{xx},\ x\in(0,\ 1),\ t\in(0,\ \infty);$

$u|_{t=0}=2\sin\pi x+\sin 2\pi x,\ u_t|_{t=0}=3\sin 3\pi x;$

$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=1}=0.$

2.12. $u_{tt}=4u_{xx},\ x\in(0,\ 2),\ t\in(0,\ \infty);$

$u|_{t=0}=2\sin\pi x-\sin 3\pi x,\ u_t|_{t=0}=5\sin 2\pi x;$

$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=2}=0.$

2.13. $u_{tt}=9u_{xx},\ x\in(0,\ 3),\ t\in(0,\ \infty);$

$u|_{t=0}=-\sin\pi x+2\sin 3\pi x,\ u_t|_{t=0}=3\sin 2\pi x;$

$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=3}=0.$

2.14. $u_{tt}=16u_{xx},\ x\in(0,\ 5),\ t\in(0,\ \infty);$

$u|_{t=0}=3\sin\pi x-7\sin 2\pi x,\ u_t|_{t=0}=-\sin 3\pi x;$

$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=5}=0.$

3. ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Решить задачу Коши. Сделать проверку.

3.1. $u_t=u_{xx},\ x\in(-\infty,\ \infty),\ t\in(0,\ \infty);$

$u|_{t=0}=x^2+2x-3.$

3.2. $u_t=2u_{xx},\ x\in(-\infty,\ \infty),\ t\in(0,\ \infty);$

$u|_{t=0}=2x^2+3x-4.$

3.3. $u_t = 3u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$;
$u|_{t=0} = 3x^2 + 2x + 1$.

3.4. $u_t = 4u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$;
$u|_{t=0} = 4 - 6x + 3x^2$.

3.5. $u_t = 5u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$;
$u|_{t=0} = 4x^2 + 5x - 9$.

3.6. $u_t = 6u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$;
$u|_{t=0} = x^2 - 2x + 12$.

Решить первую смешанную задачу на отрезке. Сделать проверку.

3.7. $u_t = 16u_{xx}$, $x \in (0, 5)$, $t \in (0, \infty)$;
$u|_{t=0} = x(5 - x)$, $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=5} = 0$.

3.8. $u_t = u_{xx}$, $x \in (0, 3)$, $t \in (0, \infty)$;
$u|_{t=0} = x(3 - x)$, $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=3} = 0$.

3.9. $u_t = 4u_{xx}$, $x \in (0, \pi)$, $t \in (0, \infty)$;
$u|_{t=0} = x(\pi - x)$, $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=\pi} = 0$.

3.10. $u_t = 25u_{xx}$, $x \in (0, 2\pi)$, $t \in (0, \infty)$;
$u|_{t=0} = x(2\pi - x)$, $u|_{x=0} = t$, $u|_{x=2\pi} = 0$.

3.11. $u_t = u_{xx}$, $x \in (0, 1)$, $t \in (0, \infty)$;
$u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=1} = 0$;
$u|_{t=0} = \sin\pi x - 2\sin 2\pi x$.

3.12. $u_t = 4u_{xx}$, $x \in (0, 2)$, $t \in (0, \infty)$;
$u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=2} = 0$;
$u|_{t=0} = 2\sin 2\pi x + 4\sin 3\pi x$.

3.13. $u_t = 9u_{xx}$, $x \in (0, 3)$, $t \in (0, \infty)$;
$u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=3\pi} = 0$;
$u|_{t=0} = \cos^2 3x - \cos^2 4x$.

3.14. $u_t = 16u_{xx}$, $(x - 2)^2 = 0$, $t \in (0, \infty)$;
$u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=\pi} = 0$;
$u|_{t=0} = \sin^2 2x - \sin^2 5x$.

4. ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЛАПЛАСА И ПУАССОНА

Решить задачу Дирихле для круга. Сделать проверку.

4.1. $\Delta u = 0,\ r \in [0,\ 1),\ \varphi \in [-\pi,\ \pi];$
$u|_{r=1} = \sin\varphi - 2\sin 3\varphi.$

4.2. $\Delta u = 0,\ r \in [0,\ 2),\ \varphi \in [-\pi,\ \pi];$
$u|_{r=2} = 2\sin\varphi + 4\cos 3\varphi + 4\sin 3\varphi.$

4.3. $\Delta u = 0,\ r \in [0,\ 3),\ \varphi \in [-\pi,\ \pi];$
$u|_{r=2} = 5\sin\varphi + 3\cos 2\varphi + 2\sin 2\varphi.$

4.4. $\Delta u = 0,\ r \in [0,\ 4),\ \varphi \in [-\pi,\ \pi];$
$u|_{r=4} = 2\sin\varphi + 3\cos 3\varphi + 2\sin 3\varphi.$

4.5. $\Delta u = 0,\ r \in [0,\ 5),\ \varphi \in [-\pi,\ \pi];$
$u|_{r=5} = 2\sin^2\varphi + 4\cos^2 2\varphi + \sin\varphi.$

4.6. $\Delta u = 0,\ r \in [0,\ 6),\ \varphi \in [-\pi,\ \pi];$
$u|_{r=6} = \sin\varphi + 4\cos^2 2\varphi.$

Решить задачу Дирихле для кольца. Сделать проверку.

4.7. $\Delta u = 0,\ 1 < r < 2,\ \varphi \in [-\pi,\ \pi];$
$u|_{r=1} = 2\sin\varphi,\ u|_{r=2} = \cos\varphi + 2\sin 3\varphi.$

4.8. $\Delta u = 0,\ 1 < r < 3,\ \varphi \in [-\pi,\ \pi],$
$u|_{r=1} = \sin\varphi - \sin 2\varphi,\ u|_{r=3} = \cos 2\varphi + \sin 3\varphi.$

Решить краевую задачу для уравнения Пуассона в кольце. Сделать проверку.

4.9. $\Delta u = x^2 - y^2,\ 1 < r < 2,\ \varphi \in [-\pi;\ \pi);$

$$u\Big|_{r=1} = 2,\quad \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=2} = 0.$$

4.10. $\Delta u = x^2 + y^2,\ 1 < r < 3,\ \varphi \in [-\pi;\ \pi);$

$$\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=1} = \cos\varphi,\quad u\Big|_{r=3} = 3.$$

4.11. $\Delta u = x^2 + y^2,\ 1 < r < 2,\ \varphi \in [-\pi;\ \pi);$

$$u\Big|_{r=1} = \sin 3\varphi,\quad \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=2} = \cos 2\varphi.$$

4.12. $\Delta u = x^2 - y^2,\ 2 < r < 3,\ \varphi \in [-\pi;\ \pi);$

$$u\Big|_{r=2} = \cos\varphi,\quad \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=3} = 0.$$

4.13. $\Delta u = x^2 - y^2$, $2 < r < 4$, $\varphi \in [-\pi; \pi)$;

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2} = 0, \quad u\big|_{r=4} = 5\sin^2\varphi.$$

4.14. $\Delta u = x^2 + y^2$, $2 < r < 3$, $\varphi \in [-\pi; \pi)$;

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2} = \cos 2\varphi, \quad u\big|_{r=3} = \sin^3\varphi.$$

4.15. $\Delta u = x^2 - y^2$, $1 < r < 6$, $\varphi \in [-\pi; \pi)$;

$$u\big|_{r=1} = 1 - 7\cos 2\varphi, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=6} = 0.$$

4.16. $\Delta u = x^4 - y^4$, $1 < r < 2$, $\varphi \in [-\pi; \pi)$;

$$u\big|_{r=1} = \sin 2\varphi, \; u\big|_{r=2} = \cos^3\varphi,$$

4.17. $\Delta u = x^2 - y^2$, $2 < r < 3$, $\varphi \in [-\pi; \pi)$;

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2} = 3 + \cos 2\varphi, \quad u\big|_{r=3} = 0.$$

4.18. $\Delta u = x^2 - y^2$, $2 < r < 4$, $\varphi \in [-\pi; \pi)$;

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2} = 2, \quad u\big|_{r=4} = \cos^3\varphi.$$

XV. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

1. ПОГРЕШНОСТИ

Указать количество верных цифр приближенного числа.

1.1. $a = 473{,}45122$, $\Delta a = 0{,}01$.

1.2. $a = 73{,}488931$, $\Delta a = 0{,}01$.

1.3. $a = 21{,}56123$, $\Delta a = 0{,}03$.

1.4. $a = 62{,}08934$, $\Delta a = 0{,}03$.

По результатам измерений найти предельную абсолютную и относительную погрешности.

1.5. 24,014 кг.

1.6. 23,5 см.

1.7. $14°15'$.

1.8. $29°25'$.

1.9. 42,2 км с точностью до 2 м.

1.10. 1500 $м^2$ с точностью до 30 $м^2$

1.11. 10 км с точностью до 10 м.

1.12. 23,5 см с точностью до 1 мм.

1.13. 56,845 с точностью до 1%.

1.14. 12,323 с точностью до 1%.

1.15. 0,00876 с точностью до 2%.

1.16. 0,00133 с точностью до 2%.

Найти предельную абсолютную и относительную погрешности при округлении.

1.17. 36,2. **1.18.** 12,9.

1.19. 0,09. **1.20.** 0,03.

1.21. 29,34. **1.22.** 21,15.

Округлить до десятых, до сотых, до тысячных долей и найти предельную абсолютную и относительную погрешности при округлении.

1.23. 22,3468. **1.24.** 98,3579.

1.25. 3,00704. **1.26.** 2,80001.

1.27. 0,02025. **1.28.** 0,06063.

1.29. π. **1.30.** e.

1.31. $\sqrt{2}$. **1.32.** $\sqrt{3}$.

Округлить до двух значащих цифр, до трех значащих цифр и найти предельную абсолютную и относительную погрешности при округлении.

1.33. 22,3468. **1.34.** 98,3579.

1.35. 3,00704. **1.36.** 2,80001.

1.37. 0,02025. **1.38.** 0,06063.

1.39. 0,00076501. **1.40.** 0,00005708.

1.41. 28769. **1.42.** 96741.

1.43. 595959. **1.44.** 959595.

1.45. 12568901. **1.46.** 23569002.

1.47. 67503900068480. **1.48.** 58274620968174.

Сравнить относительные и абсолютные погрешности, получаемые при вычислении корней уравнения.

1.49. $(x-0{,}1)^3=0$ и $(x-0{,}1)^3=10^{-2}$.

1.50. $(x-0{,}01)^2=0$ и $(x-0{,}01)^2=10^{-3}$.

1.51. $(x-2)^2=0$ и $(x-2)^2=10^{-6}$.

1.52. $(x+1)^3=0$ и $(x+1)^3=10^{-8}$.

Значения x и y заданы со всеми верными цифрами. Указать абсолютную погрешность для функции $f(x, y)$.

1.53. $x=2{,}5378$, $y=2{,}535$, $f(x, y)=x-y$.

1.54. $x=2{,}53$, $y=2{,}535$, $f(x, y)=x+y$.

1.55. $x=7{,}234$, $y=0{,}567$, $f(x, y)=x/y$.

1.56. $x=1{,}345$, $y=6{,}789$, $f(x, y)=y/x$.

1.57. $x=0{,}236$, $y=0{,}121$, $f(x, y)=3x+2y$.

1.58. $x=1{,}0045$, $y=1{,}1092$, $f(x, y)=2x-5y$.

1.59. $x=1{,}002$, $y=0{,}0008$, $f(x, y)=\sqrt{x^2+4y}$.

1.60. $x=1{,}001$, $y=0{,}0009$, $f(x, y)=\sqrt{x+4y^2}$.

1.61. $x=0{,}001$, $y=0{,}0023$, $f(x, y)=\sqrt{\dfrac{y}{x^3(x+2)}}$.

1.62. $x=0{,}011$, $y=0{,}002$, $f(x, y)=\sqrt{\dfrac{x}{y^3(y+2)}}$.

Произвести, если возможно, указанные действия над приближенными числами, в которых все десятичные знаки являются верными.

1.63. $130{,}6+45{,}104$.

1.64. $25{,}365+2{,}1$.

1.65. $153{,}21-76{,}359$.

1.66. $113{,}07-256{,}298$.

1.67. $25{,}3112-25{,}3111$.

1.68. $4{,}3406-4{,}3404$.

1.69. $18{,}1\cdot 102+91{,}26-17{,}88$.

1.70. $17{,}81+11{,}26-68{,}1\cdot 102$.

1.71. $0{,}231\cdot 0{,}034\cdot 1{,}53$.

1.72. $0{,}458\cdot 0{,}011\cdot 1{,}63$.

1.73. $7{,}5:2{,}416$.

1.74. $3{,}5:1{,}624$.

Вычислить значение, считая все знаки данных приближенных чисел верными. Оценить погрешность.

1.75. $\sqrt[3]{0{,}8}+\sqrt{0{,}2}$.

1.76. $\sqrt[3]{0{,}5}+\sqrt{0{,}5}$.

1.77. $\ln\left(10{,}3+\sqrt{4{,}2}\right)$.

1.78. $\ln\left(11{,}2+\sqrt{3{,}7}\right)$.

1.79. С какой точностью следует определить радиус основания и высоту цилиндра, чтобы можно было определить его объем с точностью до $0{,}5\%$?

1.80. С какой точностью следует определить радиус основания и высоту цилиндра, чтобы можно было определить его объем с точностью до $0{,}75\%$?

1.81. С какой точностью следует определить радиус основания и высоту конуса, чтобы можно было определить его объем с точностью до 1% ?

1.82. С какой точностью следует определить радиус основания и высоту конуса, чтобы можно было определить его объем с точностью до 2% ?

1.83. С какой точностью следует определить ребра куба, чтобы можно было определить площадь его поверхности с точностью до 2% ?

1.84. С какой точностью следует определить ребра куба, чтобы можно было определить площадь его поверхности с точностью до 5% ?

1.85. С какой точностью следует определить ребра параллелепипеда, чтобы можно было определить его объем с точностью до 3% ?

1.86. С какой точностью следует определить ребра параллелепипеда, чтобы можно было определить его объем с точностью до 1% ?

2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

Методом бисекции с заданной точностью ε найти корень уравнения на заданном интервале.

2.1. $x^3-10x+1=0$, $(0;\ 1)$, $\varepsilon=0{,}05$.

2.2. $x^3-11x+2=0$, $(0;\ 1)$, $\varepsilon=0{,}05$.

2.3. $x^3+x^2-3=0$, (0; 2), $\varepsilon=0{,}01$.

2.4. $x^3-x^2-5=0$, (0; 3), $\varepsilon=0{,}01$.

2.5. $x^5+2x-8=0$, (1; 1,5), $\varepsilon=0{,}05$.

2.6. $x^5-10x+3=0$, (1,5; 2), $\varepsilon=0{,}05$.

2.7. $\ln x=2\,\mathrm{tg}\,x$, (3,5; 4,5), $\varepsilon=0{,}01$.

2.8. $x\sin x+\cos x=0$, (2,7; 2,9), $\varepsilon=0{,}01$.

2.9. $\sqrt{x}=\ln(x+2)$, (1,4; 2), $\varepsilon=0{,}01$.

2.10. $\sqrt{x+1}=1+\ln(x)$, (1, 4,2), $\varepsilon=0{,}01$.

Найти методом простых итераций и методом Ньютона с погрешностью, не превышающей 0,1, корень уравнения $f(x)=x$.

2.11. $x^3-x+7=0$.

2.12. $x-x^3-5=0$.

2.13. $\exp(-x)+x=0$.

2.14. $\exp(x)+x=0$.

2.15. $\dfrac{1}{x-3}-x=0$, $[-1;\ 0]$.

2.16. $\dfrac{1}{x+1}-x=0$, $[0;\ 1]$.

2.17. $\ln x-4+x=0$, [1; 4]

2.18. $\ln(2x)-2+x=0$, [0,5; 2].

2.19. $\dfrac{1}{x^2+1}-x=0$, $[0{,}5;\ 0{,}8]$.

2.20. $\dfrac{1}{1+x^2}+x=0$, $[-0{,}8;\ -0{,}5]$.

Решить систему с погрешностью $\varepsilon=10^{-2}$. Сравнить с точным решением (если возможно).

2.21. $\begin{cases}31x+5y=35,\\ 6x+y=7.\end{cases}$

2.22. $\begin{cases}3x+51y=15,\\ x+7y=11.\end{cases}$

2.23. $\begin{cases}100x+y=102,\\ x+200y=202.\end{cases}$

2.24. $\begin{cases}x+10y=11,\\ 100x+1001y=1101.\end{cases}$

2.25. $\begin{cases}\cos(x-1)+y=1{,}00,\\ \sin(y)+2x=1{,}60,\end{cases}$

2.26. $\begin{cases}x=0{,}80-0{,}50\sin(y),\\ y=1{,}00-\cos(x-1).\end{cases}$

3. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ, ИНТЕГРИРОВАНИЕ, ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Функция задана таблицей своих значений. Приблизить эту функцию многочленами. Графически проиллюстрировать полученные решения.

3.1.

x	–0,2	–0,1	0,0
y	2,2	2,4	2,6

3.2.

x	0,0	0,1	0,2
y	–1,3	–1,1	–0,9

3.3.

x	0,0	1,0	2,0	3,0
y	–1,4	1,5	2,3	4,8

3.4.

x	–3,0	–2,0	–2,0	0,0
y	–1,2	1,3	2,1	4,6

3.5.

x	–2	–1	0	1	2
y	3,1	1,7	0,9	0,7	1,05

3.6.

x	–4	–2	0	2	4
y	–0,4	0,2	1	1,2	0,9

Вычислить интеграл с шагом h, уточнить результат по Рунге и сравнить с точным значением (если возможно).

3.7. $\int_0^1 (6x^2 - 3x + 4)dx,\ h = 0{,}1$. **3.8.** $\int_0^1 (4x^2 + x - 5)dx,\ \ h = 0{,}1$.

3.9. $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx,\ \ h = 0{,}5.$ **3.10.** $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x^2+7}}dx,\ \ h = 0{,}5.$

3.11. $\int\limits_0^2 \sqrt{x^2+9}dx,\;\; h=0{,}5.$ **3.12.** $\int\limits_0^2 \sqrt{x^2+4}dx,\;\; h=0{,}5.$

3.13. $\int\limits_{1,5}^2 \ln(x)dx,\;\; h=0{,}02.$ **3.14.** $\int\limits_2^{3,5} \ln(x)dx,\;\; h=0{,}02.$

3.15. $\int\limits_1^{1,6} \exp(0{,}3x^2)dx,\;\; h=0{,}04.$

3.16. $\int\limits_1^{1.6} \exp(0{,}2x^2)dx,\;\; h=0{,}04.$

3.17. $\int\limits_1^3 \exp(4/x)dx,\;\; h=0{,}2.$ **3.18.** $\int\limits_1^3 \exp(2/x)dx,\;\; h=0{,}2.$

Решить задачу Коши для уравнения аналитически и приближенно с шагом $h=0{,}2$ на отрезке $[0;\ 1]$. Сравнить точное решение с приближенным.

3.19. $y'=5,\ y(0)=-3{,}2.$

3.20. $y'=-4,\ y(0)=2{,}6.$

3.21. $y'=-2x,\ y(0)=1{,}5.$

3.22. $y'=3x,\ y(0)=1{,}5.$

3.23. $y'=4y-x,\ y(0)=0{,}5.$

3.24. $y'=y-4x,\ y(0)=0{,}5.$

3.25. $y''=\exp(3xy),\ y(0)=0,\ y'(0)=0.$

3.26. $y''=\exp(-xy),\ y(0)=0,\ y'(0)=0.$

Найти минимум функции $y=f(x)$ на заданном отрезке с заданной точностью, сравнить с точным минимумом.

3.27. $y=x^2-x,\ [0;\ 1],\ \varepsilon=10^{-3}.$

3.28. $y=x^2+x,\ [-1;\ 0],\ \varepsilon=10^{-3}.$

3.29. $y=x^2+4x-3,\ [-2{,}5;\ 0],\ \varepsilon=10^{-2}.$

3.30. $y=x^2-6x-1,\ [1{,}5;\ 3{,}5],\ \varepsilon=10^{-2}.$

3.31. $y=1-2\cos x,\ [6;\ 8],\ \varepsilon=10^{-1}.$

3.32. $y=2+\sin x,\ [-3;\ -1],\ \varepsilon=10^{-1}.$

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ

I. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Найти вектор $\vec{m}$.

№ варианта	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	$\vec{m}$
1	(−2; −1; 0)	(−1; 1; 3)	(0; 2; 1)	$\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}$
2	(0; 2; 3)	(−1; 2; 3)	(−2; 3; 2)	$\vec{a}-4\vec{b}+3\vec{c}$
3	(−2; 1; 3)	(0; −1; 1)	(2; 1; 3)	$-2\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}$
4	(−1; −2; 0)	(−1; 0; 1)	(2; −2; 3)	$4\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$
5	(2; 0; 3)	(−1; 3; 2)	(1; 0; 2)	$3\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$
6	(−2; 3; 1)	(−1; 3; 1)	(0; 3; 1)	$-3\vec{a}+\vec{b}+4\vec{c}$
7	(−1; 0; −2)	(−1; 1; 0)	(2; 3; −2)	$2\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{c}$
8	(0; 3; 2)	(2; −1; 3)	(1; 3; 0)	$4\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$
9	(1; 3; −2)	(1; 3; −1)	(1; 0; 3)	$-3\vec{a}+4\vec{b}+2\vec{c}$
10	(−2; 0; −1)	(0; 1; −1)	(3; −1; −2)	$2\vec{a}+4\vec{b}-\vec{c}$
11	(3; 0; 2)	(2; 3; −1)	(0; −2; 3)	$4\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$
12	(1; −2; 3)	(1; −1; 3)	(3; 0; 2)	$-\vec{a}+\vec{b}+4\vec{c}$
13	(0; −1; −2)	(3; −1; 1)	(3; −2; 2)	$2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}$
14	(2; 3; 0)	(3; −1; 2)	(0; 3; −2)	$3\vec{a}-4\vec{b}+\vec{c}$
15	(3; −2; 1)	(1; 0; −1)	(3; 2; −2)	$-3\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$
16	(0; −2; −1)	(3; 1; −1)	(2; 0; 1)	$4\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}$
17	(3; 2; 0)	(3; 2; −1)	(−2; −1; 0)	$\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c}$
18	(3; 1; −2)	(1; −1; 0)	(−1; −3; 0)	$-\vec{a}+4\vec{b}+2\vec{c}$

Продолжение табл.

№ варианта	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	$\vec{m}$
19	(−1; 0; −1)	(0; 1; 3)	(2; 3; 1)	$3\vec{a}+2\vec{b}-4\vec{c}$
20	(−2; −3; 1)	(0; 1; 2)	(3; 1; 2)	$4\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$
21	(−3; 0; −1)	(−2; −2; 3)	(2; 1; 0)	$-4\vec{a}+3\vec{b}+2\vec{c}$
22	(−1; −3; 1)	(−2; 1; −1)	(3; 1; 0)	$2\vec{a}+\vec{b}-4\vec{c}$
23	(−3; 0; −2)	(−3; −2; 1)	(3; −2; 0)	$3\vec{a}-4\vec{b}+5\vec{c}$
24	(−1; −2; 1)	(−2; −3; 0)	(−2; 3; −1)	$-4\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c}$
25	(1; 2; 3)	(−3; −1; 0)	(−2; −1; 1)	$5\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{c}$
26	(−2; 0; 3)	(−3; 1; −1)	(3; −2; 1)	$3\vec{a}-5\vec{b}+4\vec{c}$
27	(−1; 3; −2)	(−3; 2; 0)	(−3; −1; 1)	$-4\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}$
28	(1; 3; 2)	(−1; 3; −2)	(0; 2; 1)	$5\vec{a}+4\vec{b}-3\vec{c}$
29	(−2; 3; 0)	(−2; −1; 3)	(3; 2; 1)	$\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c}$
30	(−1; −2; 3)	(3; 0; 1)	(−1; −2; 0)	$-2\vec{a}+\vec{b}+4\vec{c}$

2. Найти значения неизвестных, при которых векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

№ варианта	$\vec{a}$	$\vec{b}$
1	$-2\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$	$x\cdot\vec{i}-6\cdot\vec{j}+2\cdot\vec{k}$
2	$-3\cdot\vec{i}+7\cdot\vec{j}+\vec{k}$	$2\cdot\vec{i}-y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$
3	$2\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+\vec{k}$	$4\cdot\vec{i}+\vec{j}-z\cdot\vec{k}$
4	$7\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$	$-14\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}-2\cdot\vec{k}$
5	$2\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}-\vec{k}$	$\vec{i}+3\cdot\vec{j}-z\cdot\vec{k}$
6	$x\cdot\vec{i}-4\cdot\vec{j}+2\cdot\vec{k}$	$3\cdot\vec{i}+8\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$
7	$2\cdot\vec{i}-8\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$	$x\cdot\vec{i}-4\cdot\vec{j}+\vec{k}$
8	$3\cdot\vec{i}-y\cdot\vec{j}+3\cdot\vec{k}$	$x\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}-\vec{k}$
9	$\vec{i}-y\cdot\vec{j}+2\cdot\vec{k}$	$x\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}-4\cdot\vec{k}$
10	$3\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}-\vec{k}$	$x\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}+3\cdot\vec{k}$

Продолжение табл.

№ варианта	$\vec{a}$	$\vec{b}$
11	$6\cdot\vec{i}-y\cdot\vec{j}+5\cdot\vec{k}$	$3\cdot\vec{i}-2\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$
12	$2\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{j}-z\cdot\vec{k}$	$\vec{i}-y\cdot\vec{j}-3\cdot\vec{k}$
13	$5\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{j}-z\cdot\vec{k}$	$x\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}+2\cdot\vec{k}$
14	$-3\cdot\vec{i}-y\cdot\vec{j}+\vec{k}$	$-\vec{i}-\vec{j}+z\cdot\vec{k}$
15	$-2\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}-z\cdot\vec{k}$	$x\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}-2\cdot\vec{k}$
16	$x\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}-4\cdot\vec{k}$	$\vec{i}-y\cdot\vec{j}+3\cdot\vec{k}$
17	$3\cdot\vec{i}-2\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$	$-\vec{i}+y\cdot\vec{j}+3\cdot\vec{k}$
18	$-\vec{i}+y\cdot\vec{j}-3\cdot\vec{k}$	$-x\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}+3\cdot\vec{k}$
19	$-\vec{i}+3\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$	$2\cdot\vec{i}-y\cdot\vec{j}+6\cdot\vec{k}$
20	$-4\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$	$\vec{i}+y\cdot\vec{j}-\vec{k}$
21	$\vec{i}-4\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$	$-x\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}+\vec{k}$
22	$2\cdot\vec{i}-3\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$	$4\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}-\vec{k}$
23	$x\cdot\vec{i}+6\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$	$2\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}+\vec{k}$
24	$4\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}-3\cdot\vec{k}$	$2\cdot\vec{i}-3\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$
25	$-x\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{j}+2\cdot\vec{k}$	$3\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}-z\cdot\vec{k}$
26	$x\cdot\vec{i}+\vec{j}-2\cdot\vec{k}$	$-2\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+\vec{k}$
27	$-\vec{i}+y\cdot\vec{j}-5\cdot\vec{k}$	$x\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}+\vec{k}$
28	$x\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}+8\cdot\vec{k}$	$-\vec{i}+y\cdot\vec{j}-4\cdot\vec{k}$
29	$-2\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}-4\cdot\vec{k}$	$3\cdot\vec{i}-5\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$
30	$4\cdot\vec{i}-5\cdot\vec{j}-z\cdot\vec{k}$	$-8\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}-\vec{k}$

3. Даны координаты трех точек A, B, C. Найти скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

№ варианта	*A*	*B*	*C*
1	(3; 0; 1)	(−1; −2; 3)	(−1; −2; 0)
2	(−2; −1; 3)	(−1; 2; 3)	(−2; 3; 2)
3	(−2; 1; 3)	(4; −1; 8)	(0; −1; −3)
4	(7; 2; −5)	(6; 0; −3)	(3; 2; 7)

Продолжение табл.

№ варианта	*A*	*B*	*C*
5	(−5; 0; 2)	(−4; 4; 3)	(7; 9; −2)
6	(−5; 1; 0)	(6; −3; −1)	(4; 3; 7)
7	(8; 0; −1)	(−1; 5; 4)	(0; 4; −2)
8	(9; 9; −2)	(7; 11; −4)	(5; 6; −1)
9	(4; −3; 0)	(10; 5; −4)	(2; 2; −3)
10	(−6; 1; −3)	(−4; 4; −2)	(3; 2; 1)
11	(−5; 4; −1)	(10; 5; −4)	(0; 4; −3)
12	(4; 5; −3)	(0; 7; 3)	(2; −6; −2)
13	(4; −5; 0)	(1; −1; 1)	(4; 5; 3)
14	(−4; −6; 1)	(5; −2; 0)	(1; −3; 7)
15	(−5; 4; 0)	(6; 0; 3)	(4; 8; −1)
16	(1; −4; −3)	(5; 0; −1)	(−2; 0; 6)
17	(4; −5; 1)	(4; 1; −7)	(0; 1; 7)
18	(−1; 3; −2)	(4; 9; −1)	(1; 3; 5)
19	(−7; 2; −2)	(−9; −3; 2)	(0; 1; −4)
20	(−5; −1; 1)	(3; −1; 8)	(−3; 4; 4)
21	(0; 3; −3)	(−7; 5; 1)	(1; 1; 6)
22	(−4; 0; 8)	(7; 1; 9)	(−6; −1; 0)
23	(5; 1; −1)	(8; −3; 1)	(−3; 0; 1)
24	(0; 5; 2)	(−1; 0; 3)	(−4; 4; 1)
25	(−1; −8; 0)	(−6; 1; 1)	(−4; 0; −1)
26	(5; 0; 5)	(−4; 1; 0)	(−3; 2; 7)
27	(−5; 1; −2)	(−9; 2; 2)	(−3; 0; −1)
28	(7; 7; 2)	(−2; 4; −4)	(0; 3; 6)
29	(−8; 3; 3)	(−3; −9; 0)	(4; 2; −2)
30	(−7; −1; 5)	(−4; 3; 8)	(−3; 2; 1)

4. Найти косинус угла между векторами.

№ варианта	$\vec{a}$	$\vec{b}$	№ варианта	$\vec{a}$	$\vec{b}$
1	(−1; −1; −1)	(−1; 5; −2)	16	(0; −2; 3)	(6; −2; 2)
2	(0; 4; −1)	(−5; −3; 0)	17	(−2; 2; −2)	(0; 4; −3)
3	(1; 2; 3)	(−2; −3; 1)	18	(4; 2; 4)	(−4; −4; −1)
4	(3; 0; 3)	(3; −1; 0)	19	(−1; 4; −2)	(4; 4; −1)
5	(−4; −3; −3)	(−3; −3; −2)	20	(0; 1; 0)	(2; 2; −5)
6	(2; 1; 4)	(4; 3; 2)	21	(0; 4; −3)	(5; 3; −2)

Продолжение табл.

№ варианта	$\vec{a}$	$\vec{b}$	№ варианта	$\vec{a}$	$\vec{b}$
7	(2; −2; −2)	(4; 0; 0)	22	(2; 4; 1)	(5; 4; 1)
8	(0; 3; 1)	(−3; 0; 5)	23	(−1; 1; 2)	(−2; 1; −1)
9	(3; 5;−3)	(0; 4; −3)	24	(1; −4; 2)	(−2; 0; −2)
10	(−1; 1; −4)	(5; −2; −2)	25	(−4; −2; 2)	(−4; −2; −1)
11	(1; 2; 4)	(5; 1; 1)	26	(−2; −2; 2)	(4; 4; −2)
12	(3; 3; 0)	(2; 2; 2)	27	(0; 2; 1)	(3; 0; 3)
13	(−3; 3; −1)	(−1; 0; −1)	28	(−4; 3; 0)	(1; 0; −2)
14	(2; 1; 0)	(5; −1; −1)	29	(−1; 3; −3)	(−3; −2; 1)
15	(2; −1; −2)	(1; 1; −1)	30	(0; 1; 2)	(3; 3; 0)

5. Используя векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, найти площадь треугольника ABC.

№ варианта	*A*	*B*	*C*
1	(−2; −3; 1)	(0; 1; 2)	(3; 1; 2)
2	(3; −2; 1)	(1; 0; −1)	(3; 2; −2)
3	(−1; −2; 0)	(−1; 0; 1)	(2; −2; 3)
4	(−1; 0; −2)	(−1; 1; 0)	(2; 3; −2)
5	(3; 2; 0)	(3; 2; −1)	(−2; −1; 0)
6	(−2; 0; −1)	(0; 1; −1)	(3; −1; −2)
7	(0; −1; −2)	(3; −1; 1)	(3; −2; 2)
8	(1; 2; 3)	(−3; −1; 0)	(−2; −1; 1)
9	(0; 2; 3)	(−1; 2; 3)	(−2; 3; 2)
10	(3; −2; 1)	(0; 3; −1)	(3; 2; −2)
11	(2; 0; 3)	(−1; 3; 2)	(1; 0; 2)
12	(1; 3; −2)	(1; 3; −1)	(1; 0; 3)
13	(3; 0; 2)	(2; 3; −1)	(0; −2; 3)
14	(−2; −3; 0)	(−3; 1; −2)	(0; −3; 2)
15	(−2; 0; 3)	(−3; 1; 1)	(3; −2; 1)
16	(−2; 3; 1)	(−1; 3; 1)	(0; 3; 1)
17	(0; 3; 2)	(2; −1; 3)	(1; 3; 0)
18	(1; −2; 3)	(1; −1; 3)	(3; 0; −2)
19	(−2; 0; −1)	(0; 1; 3)	(−2; −3; 1)
20	(−3; 0; −2)	(−3; −2; 1)	(3; −2; 0)
21	(−3; 2; 0)	(−1; 3; −2)	(−2; 3; −1)
22	(−2; 1; 3)	(0; −1; 1)	(2; 1; 3)

Продолжение табл.

№ варианта	*A*	*B*	*C*
23	(−3; 0; −1)	(−2; 2; 3)	(−2; 1; 0)
24	(0; −2; −1)	(3; 1; −1)	(2; 0; 1)
25	(1; 2; 3)	(−3; 1; −2)	(−3; −1; 1)
26	(−1; −3; 1)	(−2; 1; −1)	(3; 1; 0)
27	(3; 1; −2)	(1; −1; 0)	(−1; −3; 0)
28	(−2; −1; 3)	(−2; 3; 0)	(3; 2; 1)
29	(−1; −2; 1)	(2; −3; 0)	(−2; 3; −1)
30	(3; 0; 1)	(−1; −2; 3)	(−1; −2; 0)

6. Исследовать компланарность векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$.

№ варианта	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
1	(1; 2; 3)	(2; 0; 4)	(2; −4; 2)
2	(4; 4; −3)	(1; 0; 2)	(3; 4; −5)
3	(2; 1; 0)	(−1; 3; 1)	(5; 1; 2)
4	(5; 3; −2)	(−5; −3; 0)	(5; 3; −1)
5	(3; −1; 0)	(3; 1; 2)	(2; 5; 4)
6	(−2; 2; −2)	(0; 4; −3)	(−2; −2; 1)
7	(0; 2; 1)	(1; 1; 5)	(3; −2; 4)
8	(2; −2; −2)	(4; −1; −1)	(−1; −1; −1)
9	(0; 2; 1)	(3; 0; 3)	(−3; 2; −2)
10	(−3; 3; −1)	(−1; 0; −1)	(−2; 3; 0)
11	(−1; 1; 2)	(2; 0; 3)	(1; 5; 2)
12	(0; 1; 2)	(3; 3; 0)	(−3; −2; 2)
13	(2; −1; 1)	(1; 0; −2)	(1; −4; 3)
14	(2; 1; 2)	(3; −1; 0)	(2; 3; 2)
15	(2; 1; 0)	(5; −1; 1)	(−3; 2; 1)
16	(−1; 3; −3)	(−3; −2; 1)	(2; 5; −4)
17	(−4; −2; 2)	(−4; −2; −1)	(2; 1; −1)
18	(−1; 2; 2)	(3; 1; 0)	(5; 4; 3)
19	(1; −4; 2)	(−2; 0; −2)	(3; −4; 4)
20	(3; 5; −3)	(0; 4; −3)	(−3; 1; 0)
21	(0; 4; −3)	(5; 3; −2)	(−5; 1; −1)
22	(0; −1; 3)	(3; 1; 2)	(4; 1; 5)
23	(−2; −1; −2)	(−4; −4; −1)	(0; 2; −3)
24	(0; 4; 2)	(1; 1; 3)	(2; −1; 3)

Продолжение табл.

№ варианта	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
25	(−1; 1; −4)	(5; −2; −2)	(−6; 3; −2)
26	(2; 1; 3)	(1; 3; 2)	(0; 4; −1)
27	(1; 2; 4)	(5; 1; 1)	(−4; 1; 3)
28	(2; 4; 1)	(5; 4; 1)	(−1; 4; 1)
29	(2; 4; 2)	(1; 3; 1)	(0; −1; 2)
30	(3; 4; 2)	(2; 2; −1)	(1; 2; 3)

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через три заданных точки A, B, C, и найти вектор нормали к этой плоскости.

№ варианта	A	B	C
1	(4; 2; 5)	(0; 7; 2)	(0; 2; 7)
2	(4; 4; 10)	(4; 10; 2)	(2; 8; 4)
3	(4; 6; 5)	(6; 9; 4)	(2; 10; 10)
4	(3; 5; 4)	(8; 7; 4)	(6; 10; 4)
5	(10; 6; 6)	(−2; 8; 2)	(6; 8; 9)
6	(1; 8; 2)	(5; 2; 6)	(5; 7; 4)
7	(6; 6; 5)	(4; 9; 5)	(4; 6; 11)
8	(7; 2; 2)	(5; 7; 7)	(5; 3; 1)
9	(8; 6; 4)	(10; 5; 5)	(5; 6; 8)
10	(7; 7; 3)	(6; 5; 8)	(3; 5; 8)
11	(3; −2; 1)	(1; 0; 2)	(1; 2; 0)
12	(1; −1; 0)	(4; 3; 5)	(7; 2; 1)
13	(1; 2; 3)	(3; 2; 1)	(4; 3; 1)
14	(1; 2; 2)	(2; 3; 1)	(3; 2; 1)
15	(2; 3; 1)	(3; 4; 1)	(4; 2; 1)
16	(2; −1; −2)	(3; 1; 0)	(4; 0; 1)
17	(3; 0; −1)	(2; 5; 1)	(5; 1; −2)
18	(−1; 3; 2)	(1; 3; 3)	(−2; 1; 4)
19	(−2; 1; 5)	(2; 3; 6)	(−1; 2; 8)
20	(4; −2; 1)	(5; 1; 3)	(6; −1; 1)
21	(1; 4; −3)	(0; 3; −2)	(3; 5; 1)
22	(6; 0; 1)	(9; 3; 1)	(7; 2; 3)
23	(−3; −4; 5)	(−1; −5; 7)	(−2; −1; 3)
24	(5; −1; 2)	(6; 1; 1)	(2; 3; 0)

Продолжение табл.

№ варианта	*A*	*B*	*C*
25	(1; –4; 3)	(4; –5; –1)	(3; –6; –4)
26	(0; 3; 5)	(2; 6; 8)	(–1; 4; 3)
27	(–4; 5; 0)	(–7; 7; 1)	(–3; 0; –1)
28	(2; 4; 7)	(–1; 6; 9)	(0; 5; 7)
29	(8; –3; 2)	(9; –3; 4)	(10; –1; 6)
30	(–5; 4; 3)	(–7; 6; 4)	(–5; 7; 5)

8. Найти точку пересечения прямой и плоскости.

№ варианта	Прямая	Плоскость
1	$\frac{x-3}{4}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-1}{1}$	$2x-y+3z+4=0$
2	$\frac{x-4}{3}=\frac{y-5}{6}=\frac{z-10}{3}$	$x+y-z+7=0$
3	$\frac{x-6}{5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+2}{-5}$	$2x+3y+z+10=0$
4	$\frac{x-7}{2}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-8}{11}$	$3x+y+4z-5=0$
5	$\frac{x-9}{7}=\frac{y}{-6}=\frac{z-18}{18}$	$5x-3y-z+8=0$
6	$\frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{8}=\frac{z-11}{14}$	$x-2y+3z-7=0$
7	$\frac{x-4}{2}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-6}{6}$	$x+3y+4z-1=0$
8	$\frac{x-13}{12}=\frac{y-5}{10}=\frac{z-3}{6}$	$4x+2y-3z-3=0$
9	$\frac{x-7}{5}=\frac{y}{-1}=\frac{z-7}{8}$	$7x-2y+4z-8=0$
10	$\frac{x-4}{-8}=\frac{y-9}{-1}=\frac{z+9}{-19}$	$2x+3y-5z-4=0$
11	$\frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+7}{-8}$	$x-2y+3z+10=0$
12	$\frac{x+3}{1}=\frac{y+9}{-12}=\frac{z-15}{12}$	$2x+5y-6z+11=0$
13	$\frac{x+8}{2}=\frac{y-8}{4}=\frac{z+5}{-7}$	$x-3y+7z+8=0$
14	$\frac{x+6}{-7}=\frac{y-9}{11}=\frac{z+16}{-16}$	$2x-4y+9z-10=0$
15	$\frac{x+1}{-1}=\frac{y+3}{-5}=\frac{z-11}{7}$	$3x+5y-z-6=0$

Продолжение табл.

№ варианта	Прямая	Плоскость
16	$\frac{x-1}{-4}=\frac{y-3}{13}=\frac{z+2}{-2}$	$3x-y+5z-25=0$
17	$\frac{x+3}{-7}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-1}{-4}$	$2x-3y-z-15=0$
18	$\frac{x+2}{-1}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-5}{3}$	$2x+2y+3z+8=0$
19	$\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z+1}{-2}$	$x-4y-2z+3=0$
20	$\frac{x-5}{8}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-2}{7}$	$3x-2y+4z+37=0$
21	$\frac{x}{-5}=\frac{y+4}{-9}=\frac{z-3}{5}$	$4x+3y-z-37=0$
22	$\frac{x-3}{10}=\frac{y+2}{-7}=\frac{z-4}{0}$	$3x-4y+2z+33=0$
23	$\frac{x-2}{0}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{-10}$	$5x+2y+3z-39=0$
24	$\frac{x+5}{0}=\frac{y+3}{-6}=\frac{z-2}{-3}$	$x-5y-4z+40=0$
25	$\frac{x+7}{-6}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{2}$	$6x+y-2z-1=0$
26	$\frac{x-6}{5}=\frac{y-4}{9}=\frac{z+2}{-1}$	$7x+4y-3z+10=0$
27	$\frac{x-8}{7}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-1}{4}$	$2x+6y-4z-2=0$
28	$\frac{x-1}{0}=\frac{y-9}{7}=\frac{z+7}{-5}$	$8x-6y+2z+8=0$
29	$\frac{x-2}{8}=\frac{y+6}{-7}=\frac{z-8}{7}$	$2x-y+9z+4=0$
30	$\frac{x+7}{-9}=\frac{y+8}{-7}=\frac{z-4}{6}$	$9x+7y-6z-23=0$

II. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1. Найти произведение матриц.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

15. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. 16. $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 18. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. 20. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & -5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 5 & 4 & 3 \\ 0 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. 22. $\begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

23. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 2 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. 24. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 6 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. 26. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

27. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. 28. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

29. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. 30. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Найти произведение матриц.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$

5. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

6. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$

7. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$

8. $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

9. $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$

10. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$

11. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$

12. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -4 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$

13. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

14. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 0 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$

15. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

16. $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

17. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$

18. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$

19. $\begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \\ 7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

20. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -8 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

23. $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 7 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

24. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 3 & 3 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

26. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

27. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

28. $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

29. $\begin{pmatrix} -4 & -4 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

30. $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. 8. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. 9. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$. 11. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$. 12. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$. 14. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$. 15. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

16. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$. 17. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$. 18. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

19. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}$. 20. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$. 21. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

22. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$. 23. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$. 24. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

25. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$. 26. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. 27. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

28. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$. 29. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. 30. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

4. Вычислить определитель разложением по элементам первой строки.

1. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$. 2. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$. 3. $\begin{vmatrix} k & l & m \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} r & s & t \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$. 5. $\begin{vmatrix} b & c & d \\ -3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. 6. $\begin{vmatrix} u & v & w \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} d & e & f \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$. 8. $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$. 9. $\begin{vmatrix} h & i & j \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} r & s & t \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$. 11. $\begin{vmatrix} l & m & n \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$. 12. $\begin{vmatrix} p & q & r \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} g & h & i \\ 5 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$. 14. $\begin{vmatrix} d & e & f \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix}$. 15. $\begin{vmatrix} s & t & u \\ 2 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

16. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$. 17. $\begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$. 18. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

19. $\begin{vmatrix} l & m & n \\ 0 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$. 20. $\begin{vmatrix} q & r & s \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}$. 21. $\begin{vmatrix} b & c & d \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

22. $\begin{vmatrix} u & v & w \\ 3 & 0 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. 23. $\begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$. 24. $\begin{vmatrix} d & e & f \\ 3 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

25. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$. 26. $\begin{vmatrix} k & l & m \\ 0 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$. 27. $\begin{vmatrix} g & h & i \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

28. $\begin{vmatrix} c & d & e \\ 1 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$. 29. $\begin{vmatrix} s & t & u \\ 2 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$. 30. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

5. Найти матрицу, обратную данной, и сделать проверку.

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. 5. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. 6. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. 8. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. 9. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 11. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 12. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. 14. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. 15. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. 17. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 18. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 20. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. 21. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 23. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. 24. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 26. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 27. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

28. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 29. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 30. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему.

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 6x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} -3x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 9x_1 + 7x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 - 5x_5 = 0, \\ 8x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ 12x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 10x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 15x_1 - 10x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 10x_3 + 12x_4 = 0, \\ -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 6x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 - 4x_5 = 0, \\ 12x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 - x_5 = 0, \\ -3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ 6x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 7x_1+2x_2-x_3+2x_4+x_5=0, \\ 14x_1-3x_2+x_3-x_4-2x_5=0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} -10x_1+5x_2-x_3+2x_4=0, \\ 5x_1-x_2+3x_3-x_4=0, \\ -15x_1+2x_2-2x_3+x_4=0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 8x_1-2x_2+x_3+5x_4-3x_5=0, \\ 16x_1+2x_2-2x_3+x_4-x_5=0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 4x_1+x_2-3x_3+4x_4-2x_5=0, \\ -2x_1-x_2+2x_3-3x_4+x_5=0, \\ 6x_1+2x_2-4x_3+x_4-3x_5=0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 9x_1-x_2-4x_3-x_4+4x_5=0, \\ 18x_1+3x_2+x_3+3x_4-5x_5=0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 4x_1+2x_2+x_3-2x_4=0, \\ 14x_1-6x_2-3x_3+x_4=0, \\ -x_1+x_2+2x_3-x_4=0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 10x_1+x_2-2x_3+3x_4-2x_5=0, \\ 20x_1+3x_2+x_3+2x_4-3x_5=0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 8x_1-3x_2+x_3-3x_4+2x_5=0, \\ -4x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5=0, \\ 12x_1-2x_2+3x_3-x_4+x_5=0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1+x_2+4x_3-5x_4+x_5=0, \\ 3x_1-2x_2+3x_3-x_4-2x_5=0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 6x_1-3x_2-x_3+2x_4=0, \\ -4x_1+x_2+2x_3-3x_4=0, \\ 2x_1-2x_2+x_3-x_4=0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3-4x_4-5x_5=0, \\ 6x_1+3x_2-2x_3+x_4-3x_5=0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 4x_1+x_2-2x_3+2x_4+x_5=0, \\ -8x_1-2x_2+3x_3-x_4-2x_5=0, \\ 12x_1+2x_2-3x_3+x_4+2x_5=0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 9x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} -21x_1 + 4x_2 + x_3 - 4x_4 = 0, \\ 7x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 14x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 12x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} -3x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 15x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

7. Решить систему.

1. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 15x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 6x_4 - x_5 = 2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} -18x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 4x_4 - x_5 = 1, \\ -6x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 2, \\ 12x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ 14x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 5x_4 - x_5 = 2, \\ -3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 3, \\ 6x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 - x_5 = 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 4, \\ 12x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 21x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 3, \\ 7x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 14x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 6x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 - 4x_5 = 3, \\ 12x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 = 1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 15x_1 - 12x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 - 10x_3 + x_4 + 5x_5 = 3, \\ -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 2x_4 + x_5 = 4. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ 9x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 4x_5 = 3. \end{cases}$

10. $\begin{cases} -8x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 3, \\ -12x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 4, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ 10x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 4, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 2, \\ 12x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 - 4x_5 = 1, \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 4. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 3, \\ -4x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 4, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 5. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 - 5x_5 = 4, \\ 8x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 4, \\ 9x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 5. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 + x_5 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 = 4. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 5, \\ -4x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ 12x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 - x_5 = 4, \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 2. \end{cases}$

20. $\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 5, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - x_5 = 6. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 10x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 2, \\ 20x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 4. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 5, \\ 14x_1 - 6x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 6, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 5x_5 = 4. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 1, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$

24. $\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 + x_5 = 6, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - x_5 = 5. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 9x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + 4x_5 = 1, \\ 18x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 5. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 5, \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 = 6, \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 7. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 5. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 7, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 5. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 8x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 - 3x_5 = 3, \\ 16x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 5. \end{cases}$

30. $\begin{cases} -10x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 7, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 + x_5 = 5, \\ -15x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 6. \end{cases}$

III. ПРЕДЕЛЫ

1. Найти предел.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+5x+1}{3x+7}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+5x^2-10}{7x^3+x^2+1}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+5x-6}{2x^4-11x+1}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-7x^3+5x+11}{8x^3-6x^2+1}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-6x+2}{7x^2+11}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x^2-5x+1}{2x^4+1}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2-16}{12x^2+8}$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-6x^2-3x+1}{7x^4-8x^3-7}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+6x^2-4}{9x^3+3x^2+1}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+8x^2-2}{3x+5}$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+5x+6}{8x^2-9x-8}$.

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^2-7x+5}{-11x^2+5x+3}$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^5+5x^2-11}{6x^3+11x+4}$.

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4+5x^3-6x^2+1}{17x^4+5x^2-13}$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+9x-4}{6x^5+3x^4-10}$.

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^2+3x-4}{2x-1}$.

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-8x+9}{6x^3+8x+19}$.

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+5x^2+2}{2x-6}$.

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-4x+6}{8x^2+11}$.

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+5x^3-9}{-7x+9}$.

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+5x-4}{-9x^2+5}$.

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+1}{-x^5-15}$.

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+5x-6}{9x^2-6x+5}$.

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-6x+11}{2x^3+3x+1}$.

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+4}{-3x^3+5}$.

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-5x^4-6x^2+9}{4x^4+x^3-3}$.

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-11x+12}{2x^2+5x-8}$.

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-6x+7}{3x^4-5x^3+10}$.

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3+4x-7}{-2x+5}$.

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-6x^2+2}{-9x^3+3x-4}$.

2. Найти предел.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-11x+5}{-7x^2+9}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-6x+5}{-9x+11}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+6}{11x^2-5}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-5x+3}{2x^5+10}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5+9x+22}{3x^2+12x-4}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^5+7x-8}{14x^5+5x+1}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+5x-11}{-12x^2-8}$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5+4x^3-6}{2x+9}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+7x+2}{9x^4-12}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+6x+1}{7x^2-2x+3}$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4+5x^2-6}{3x^3+5x^2-3}$.

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+7x+1}{3x^5+7x^2-4}$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3+5x-6}{-3x^5+12}$.

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^2+5x-6}{12x^5+5x-6}$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4x-10}{7x^3-9x+5}$.

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+8}{7x^3+2x+6}$.

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+1}{4x^5+12x-6}$.

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+6x+1}{3x^2-11}$.

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3+4x^2-7}{7x^8+11x+6}$.

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^2+3x+5}{9x^2-5x+2}$.

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x+4}{7x-9}$.

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2}{5x^2+x-1}$.

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^3+5x^2+1}$.

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-12x+11}{-7x^2+5}$.

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+3x^2-6}{3x+5}$.

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+4x-9}{3x^5+11x-9}$.

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-9x^2+4x+13}{13x^2-2x+1}$.

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+5x+7}{13x^2-6x+2}$.

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+8x-9}{7x^2-2x-3}$.

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5x-4}{-x^3+5}$.

3. Найти предел.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-17x^4+5}{12x^7+15x+6}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+5}{4x^2+11x-6}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-5x^2+1}{2x+5}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+11x^2+6}{-2x+7}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+11x-7}{x^4-5x}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-6x+1}{2x+4}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-11}{3x^2+5x-4}$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2+5x-6}{11x^2-2x+4}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^5-22x+2}{3x^2+5x+1}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5+6x^3-1}{2x^{11}+3x-4}$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^2-6x+5}{3x^3+11}$.

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5+7x^2-11}{-2x+4}$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^2+5x+1}{25x^2+3x+2}$.

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5+5x^4-2}{17x^3-12x+5}$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{-2x-5}$.

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+5x}{10x^4+5x^3-6}$.

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5+6x^4-9}{2x^2-11x+25}$.

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5x+4}{3x^4-3x+6}$.

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-6x+5}{3x+1}$.

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-15x^2+2}{x^6-5x^3-11}$.

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+8x-4}{2x^7+4}$.

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^3+5x^2-6}{13x^3+5x+1}$.

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-3x^3+2}{x^2-4}$.

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-8}{x^5+3x-12}$.

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-5x^2+9}{9x^3+6x-11}$.

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+6x^4-5}{x^2+5x+6}$.

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{2x^5+11}$.

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x-6}{2x-9}$.

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+3x+1}{2x^5+6x-4}$.

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x+1}{2x^2-3}$.

4. Найти предел.

1. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$.

2. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-2x}{x^3-2x^2+3x-6}$.

3. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-27}{(x^2-9)^2}$.

4. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+8x+15}{(x+3)(x+5)^2}$.

5. $\lim\limits_{x\to1/3}\dfrac{6x^2-5x+1}{3x-1}$.

6. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x^2-x-6}$.

7. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-10x+25}{x^3-125}$.

8. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3-1}$.

9. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+8}{x^2-4}$.

10. $\lim\limits_{x\to1/3}\dfrac{6x^2+x-1}{x-1/3}$.

11. $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{3x-21}{x^2-6x-7}$.

12. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$.

13. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^2-5x+4}$.

14. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-2x}{3x^3-5x^2+x}$.

15. $\lim\limits_{x\to0,5}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.

16. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$.

17. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$.

18. $\lim\limits_{x\to-9}\dfrac{x^2+9x}{x^2+6x-27}$.

19. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x^3-27}$.

20. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-16}{x^2-11x+28}$.

21. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2+6x}{x+3}$.

22. $\lim\limits_{x\to-1/3}\dfrac{9x^2-1}{(3x+1)(x-1)^2}$.

23. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x^2+5x-2}{x+2}$.

24. $\lim\limits_{x\to-0,5}\dfrac{6x^2+x-1}{x+0,5}$.

25. $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2-16}{x^2-3x-28}$.

26. $\lim\limits_{x\to-1/3}\dfrac{3x^2-2x-1}{(x+1/3)^2}$.

27. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$.

28. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{x^2-6x+9}$.

29. $\lim\limits_{x\to -3{,}5}\dfrac{2x^2+13x+21}{2x+7}$.

30. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-5x-6}{x^2+2x+1}$.

5. Найти предел.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-2x)^2}{x^4-5x^2+4}$.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-8x^2+16}{x^2-4x+4}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+5x-6}{x^4-1}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-4)^2}{x^4-3x^2-4}$.

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{(x-2)^2(x+5)}$.

7. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{x^2+3x-40}{(x+1)(x^2+16x+64)}$.

8. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-4x-21}{(x-7)^2}$.

9. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3+x^2+x+2}{x^3+1}$.

10. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4-16}{x^3+2x^2}$.

11. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{x^3+3x^2+x+3}$.

12. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-5x}{x^4-625}$.

13. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-2x)^2}{x^2-4x+4}$.

14. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^6-x^4}$.

15. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-1}{x^4+4x^2-5}$.

16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{(x^2+x-2)^2}$.

17. $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{x(x^2-49)}{x^2+14x+49}$.

18. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^4-2x^3}$.

19. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^4-2x^2-575}{x^2+x-20}$.

20. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2x}{x^2-4x+3}$.

21. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+5x-6}{x^3+2x^2-x-2}$.

22. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+x^3}$.

23. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-2x+1)^2}{(2x^2-x-1)^2}$.

24. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$.

25. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$.

26. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^4-8x^2-425}{(x-5)(x+5)}$.

27. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^4-x^2-1}{x^3+2x^2-x-2}$.

28. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{2x^4-x^2-1}$.

29. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x-2}{x^4-16}$.

30. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-2x+1)^2}{x^3-x^2-x+1}$.

6. Найти предел.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-1}{2-\sqrt{4-6x}}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5-\sqrt{25+x^2}}{1-\sqrt{1-x}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{100+x}-10}{6-\sqrt{36+x}}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7-\sqrt{49+x^2}}{2-\sqrt{4-x}}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{8+x^2}-\sqrt{8}}{12-\sqrt{144-x^2}}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{15-\sqrt{225+x}}{3-\sqrt{9-x}}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{49-x}-7}{3-\sqrt{9-x}}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8-\sqrt{64+x}}{1-\sqrt{1+5x^2}}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{225+x^2}-15}{1-\sqrt{1+x}}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9-\sqrt{81-x^2}}{5-\sqrt{25+x^2}}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7+x}-\sqrt{7}}{4-\sqrt{16+x^2}}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12-\sqrt{144-x}}{1-\sqrt{1+x}}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{25+2x}-5}{2-\sqrt{4+3x}}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{5+7x}}{2-\sqrt{4+x}}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{81-x^2}-9}{\sqrt{2}-\sqrt{2-x}}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{11-\sqrt{121-x}}{4-\sqrt{16-x}}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{169+x}-13}{1-\sqrt{1-x}}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{7+6x}}{9-\sqrt{81+2x}}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{121+x^2}-11}{\sqrt{3}-\sqrt{3-2x^2}}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9-\sqrt{81+2x}}{13-\sqrt{169-x}}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{13+x}-\sqrt{13}}{4-\sqrt{16+x}}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{8+x^2}}{7-\sqrt{49+x}}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-5x}-1}{\sqrt{7}-\sqrt{7-4x}}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-8x}}{\sqrt{11}-\sqrt{11-x^2}}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{15+9x}-\sqrt{15}}{3-\sqrt{9+x^2}}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6-\sqrt{36+2x^2}}{\sqrt{6}-\sqrt{6-x^2}}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{64+x}-8}{1-\sqrt{1-3x}}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\sqrt{9-3x}}{10-\sqrt{100+x}}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{\sqrt{5}-\sqrt{5-2x^2}}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4-\sqrt{16+3x}}{1-\sqrt{1+9x}}$.

7. Найти предел.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{4x^2}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot \operatorname{tg} 4x}{\arcsin x^2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 7x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x\cdot \sin 3x}{\sin x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1-\cos 6x)}{\operatorname{tg} x^2}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\cos 7x\cdot \sin 6x}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\operatorname{arctg} 3x}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x^2}{\arcsin 5x\cdot \sin(x/4)}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{8x^2-9x}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x^4}{x^2\cdot(1-\cos 3x)}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-e^{4x})}{2x^2+x}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt[4]{1-2x}-1}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\operatorname{tg}^2 2x)}{1-\cos(x/2)}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(e^{-3x}-1)}{\operatorname{tg} x}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3\pi x}{\sin 7\pi x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg} 5x}{1-\cos 10x}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{3^{2x}-1}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x^2}{1-\cos(-2x)}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\sin 9x\cdot \cos 10x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3\left(\sqrt[3]{x}\right)}{8x^2-6x}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos 2x}{\arcsin 11x}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{\operatorname{tg}(3x)^2}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 5\pi x}{\operatorname{tg} 9\pi x}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}-1}{e^{2x}-1}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{2x}-1}{\sqrt[3]{x}\cdot\arcsin x}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{4^{9x}-1}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\operatorname{tg}^2 x)}{\sin(2x)^2}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}5x\cdot\cos 4x}{\operatorname{tg}10x}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(-3x)-1}{\sin 9x^2}$.

8. Найти предел.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{\ln(1-\operatorname{tg}x)}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 6x}{x\operatorname{tg}x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin^2(\operatorname{tg}x))}{1-\cos x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{4x}-3^{2x}}{\operatorname{arctg}2x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-6x}}{\operatorname{tg}2x\cdot\cos x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{\arcsin 2x^2}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x-\sin^2 x}{\sqrt[4]{1+x}-1}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1+4\operatorname{tg}x)}{\cos^2-1}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x^3}{x\cdot(5^{3x}-5^x)}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+2x}-\sqrt[4]{1-x}}{\sin x\cdot\cos 3x}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sin((\pi-x)/2)}{\operatorname{tg}^2 x}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x-\sin 4x}{4x^3}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 5x)}{x\cdot\arcsin 4x\cdot 5^x}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+2x}}{\ln(1-7x)}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 4x-1}{x\cdot\operatorname{tg}^3 x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{6x}-4^x}{\operatorname{arctg}(-5x)}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-\cos 6x}{\sin(13x^2)}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\operatorname{tg}^2(\sin x))}{\cos x\cdot x^2}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2((2\pi-x)/2)}{\operatorname{tg}^2 x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos(-2x))}{x\cdot\operatorname{tg}x\cdot 2^x}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1-7x}-\sqrt[5]{1-3x}}{\sin 2x\cdot\cos 7x}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{5x}}{\ln(1+\operatorname{tg}3x)}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)^3}{x^2\cdot(7^{3x}-7^{4x})}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\operatorname{tg}5x}{\sin 2x\cdot x^2}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{x\cdot\sin^3 x}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 3x}{\sin 8x^2}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}4x^3}{\operatorname{tg}x\cdot(2^{3x}-2^x)}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+6x}-\sqrt[3]{1+4x}}{\operatorname{arctg}2x\cdot\cos 2x}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+8x}}{\ln(1-\sin x)}$.

9. Найти предел.

1. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\operatorname{tg}(\pi(x+2))}{\operatorname{arctg}(3x+6)}$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(3x-3)\operatorname{tg}(11x-11)}{(x-1)^2}$.

3. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin(5x-\pi)}{\arcsin(3\pi x-3\pi^2)}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(3(x-1))\cos(4(x-1))}{(2x-2)\cos(x-1)}$.

5. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sin(4\pi x)}{\sin(3\pi x)}$.

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{tg}(6x-6)-\operatorname{tg}(5x-5)}{5\sin(x-1)}$.

7. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\cos(7x+7)\sin(5x+5)}{3x+3}$.

8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cos(8x-16)-\cos(6x-12)}{2\operatorname{tg}^2(x-2)}$.

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin^3(x-1)}{(x-1)^2\sin(3x-3)}$.

10. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-\cos(7x-14)}{\operatorname{tg}\left[3(x-2)^2\right]}$.

11. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\cos(3x+3)\sin(2x+2)}{5x+5}$.

12. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)+\sin(8x-16)}{3\operatorname{tg}(x-2)\cos(x-2)}$.

13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(\pi x)}{\sin(3\pi x)}$.

14. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\operatorname{tg}(3x-7\pi)}{\arcsin(x-\pi)}$.

15. $\lim\limits_{x\to -\pi}\dfrac{\sin 5x-\sin x}{4\operatorname{tg}x\cdot\cos 2x}$.

16. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}7x}{3\operatorname{tg}2x\cdot\cos 2x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(4(x-2))\arccos(4(x-2))}{(2x-4)\cos(x-2)}$.

18. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin(3\pi(x+2))}{\sin(-5\pi x)}$.

19. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)\cos(3x+6)}{\sin(7x+14)}$.

20. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x-\sin 7x}{10\,\mathrm{tg}\,x\cdot\cos x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cos(6x-12)-\cos(4x-8)}{2\sin^2(x-2)}$.

22. $\lim\limits_{x\to -5\pi}\dfrac{\sin x+\sin 3x}{6\,\mathrm{tg}\,x\cdot\cos 4x}$.

23. $\lim\limits_{x\to -3\pi}\dfrac{\mathrm{tg}(7x+\pi)}{\mathrm{arctg}(x+3\pi)}$.

24. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,4x}{8\sin(-5x)\cdot\cos x}$.

25. $\lim\limits_{x\to -\pi}\dfrac{\sin(6x-\pi)}{\mathrm{arctg}(8\pi x+8\pi^2)}$.

26. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sin(7\pi x)}{\sin(\pi x)}$.

27. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\mathrm{tg}(\pi(x+4))}{\arcsin(3x+12)}$.

28. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin(-(x+2))\arccos(x+2)}{(2x+4)\cos(-(x+2))}$.

29. $\lim\limits_{x\to -\pi}\dfrac{\mathrm{tg}\,6x+\mathrm{tg}\,x}{7\sin 3x\cdot\cos 4x}$.

30. $\lim\limits_{x\to 3\pi}\dfrac{\sin x-\sin 3x}{5\,\mathrm{tg}\,4x\cdot\cos 8x}$.

10. Найти предел.

1. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\ln(3+x)}{\mathrm{tg}(2x+4)}$.

2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\ln(1+\mathrm{tg}^2(x+1))}{1-\cos(2x+2)}$.

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4^x-64}{x-3}$.

4. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2^{-x}-16}{x+4}$.

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\ln x)^2}{1-x^3}$.

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{5+x}-2}{\sin \pi x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\ln x-\ln 10}{\sqrt{x-9}-1}$.

8. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\ln(1-\sin(2x+4))}{\sin(2x+4)}$.

9. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{e^x-e^3}{\mathrm{tg}(x^2-9)}$.

10. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(x-2)}{9-x^2}$.

11. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(\pi(x-4))\cos\pi x}{\log_2 x-1}$.

12. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\operatorname{tg}\pi x}{\sqrt[4]{2+x}-1}$.

13. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2^x-128}{x-7}$.

14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^x-e^2}{\sin(4-x^2)}$.

15. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\log_3 x-1}{\operatorname{tg}\pi x}$.

16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{2-x}-1}{\sin\pi x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\ln x-\ln 10}{\sqrt{x-9}-1}$.

18. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+\sin^2(x-1))}{1-\cos(5x-5)}$.

19. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{e^{-x}-e^3}{\operatorname{tg}(x^2-9)}$.

20. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(\ln(x-1))^2}{8-x^3}$.

21. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{6^{-x}-216}{x+3}$.

22. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{8^x-64}{x-2}$.

23. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\log_2 x-1}{\sin\pi x}$.

24. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln^2(1+\sin(x-2))}{\cos(2x-4)-1}$.

25. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\operatorname{tg}\pi x}{\sqrt[4]{18+x}-2}$.

26. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{2+x}-1}{\sin\pi x}$.

27. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\ln(-x)-\ln 2}{\sqrt{x+18}-4}$.

28. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{\sin(1-x^2)}$.

29. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\log_4 x-1}{\operatorname{tg}(\pi(x-4))}$.

30. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(\ln(5-x))^2}{64-x^3}$.

IV. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

1. Составить уравнение касательной к графику функции в точке $M(x_0, y_0)$.

1. $y=x^2-5x+4$, $M(-1, 10)$.
2. $y=x^3+2x^2-4x-3$, $M(-2, 5)$.
3. $y=x^2+5x-1$, $M(1, 5)$.
4. $y=\dfrac{3x-4}{2x-3}$, $M(2, 2)$.
5. $y=x^3+2x$, $M(1, 3)$.
6. $y=\sqrt{x}$, $M(4, 2)$.
7. $y=2x^2-3x+1$, $M(1, 0)$.
8. $y=\sqrt[3]{x-1}$, $M(1, 0)$.
9. $y=\operatorname{tg}2x$, $M(0, 0)$.
10. $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$, $M(1, 0)$.
11. $y=\arccos 3x$, $M\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.
12. $y=\dfrac{4x-x^2}{4}$, $M(2, 1)$.
13. $y=x-x^3$, $M(-1, 0)$.
14. $y=2x^2+3x-1$, $M(-2, 1)$.
15. $y=x+\sqrt{x^3}$, $M(1, 2)$.
16. $y=\sqrt[3]{x^2}-20$, $M(-8, -16)$.
17. $y=2x^2-3x+1$, $M(1, 0)$.
18. $y=\dfrac{x^2-3x+6}{x^2}$, $M\left(3, \dfrac{2}{3}\right)$.
19. $y=2x^2+3x$, $M(-1, 5)$.
20. $y=\dfrac{2x+1}{x}$, $M(1, 3)$.
21. $y=\dfrac{x^5+1}{x^4+1}$, $M(1, 1)$.
22. $y=\dfrac{1}{3x+2}$, $M\left(2, \dfrac{1}{8}\right)$.
23. $y=\dfrac{x}{x^2+1}$, $M\left(-2, -\dfrac{2}{5}\right)$.
24. $y=\dfrac{x^2-3x+3}{3}$, $M(3, 1)$.

25. $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$, $M(1,\ 1)$.
26. $y=\dfrac{1+3x^2}{x^2+3}$, $M(1,\ 1)$.
27. $y=\dfrac{3x-2x^3}{3}$, $M\left(1,\ \dfrac{1}{3}\right)$.
28. $y=\dfrac{x^2}{10}+3$, $M\left(2,\ \dfrac{17}{5}\right)$.
29. $y=\dfrac{x^2-2x-3}{4}$, $M\left(-2,\ \dfrac{5}{4}\right)$.
30. $y=8\sqrt[4]{x}-70$, $M(16,\ -54)$.

2. Найти производную.

1. $y=\sin(2+3x)^2$.
2. $y=(3+2x^2)^4$.
3. $y=2x+5\cos^3 x$.
4. $y=\dfrac{1}{\operatorname{arctg} 2x}$.
5. $y=\sqrt{xe^x+x}$.
6. $y=\sqrt[3]{2e^x-2^x+1}$.
7. $y=\sin(x^2-5x+1)$.
8. $y=\cos((2x+3)^6)$.
9. $y=\sin x(\sin x+5)$.
10. $y=2\operatorname{ctg}^3\dfrac{x}{2}$.
11. $y=(1+\sin 2x)^3$.
12. $y=(7+5x^4)^2$.
13. $y=3x+4\cos^7 x$
14. $y=\dfrac{1}{\arcsin 2x}$.
15. $y=\sqrt{x^2e^x+x^3}$.
16. $y=\sqrt[5]{3e^x-3^x+1}$.
17. $y=\cos(x^2+2x+5)$.
18. $y=\sin^5(3x-1)$.
19. $y=\cos x(\cos 2x+1)$
20. $y=5\operatorname{tg}\dfrac{x^2}{4}$.
21. $y=\operatorname{tg}((3+7x)^4)$.
22. $y=(1+3x^3)^5$.
23. $y=5x^2+7\sin 5x$.
24. $y=\dfrac{1}{\arccos 5x}$.
25. $y=\sqrt{x^3e^{2x}+3x}$.
26. $y=\sqrt[4]{7e^x+5^x+3}$.
27. $y=\operatorname{tg}(x^3+7x-1)$.
28. $y=\operatorname{tg}(5x+7)$.
29. $y=\operatorname{tg}x(\cos x-4)$.
30. $y=7\cos^2\dfrac{x}{5}$.

3. Найти производную.

1. $y = \operatorname{tg}^2 5x + \lg 2x$.
2. $y = 0{,}5\sin x^2 + \cos 2x$.
3. $y = \sin^2(x^3 e^x)$.
4. $y = 3\sin x \cdot \cos 2x + \ln^3 x$.
5. $y = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + \sqrt{x}$.
6. $y = \arcsin x^3 + \arccos x^3$.
7. $y = \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 \arccos x$.
8. $y = \ln(\arcsin 5x)$.
9. $y = \arcsin(\ln x + 1)$.
10. $y = \sqrt{x^2 + e^{2x} + 3x}$.
11. $y = \exp(\sin^2 x)$.
12. $y = 2^{\sqrt{x} + \frac{1}{x}}$.
13. $y = 3^{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}$.
14. $y = \lg(0{,}5x^2 + 2x - 4)$.
15. $y = 7^{\cos^2 3x}$.
16. $y = \frac{1}{\ln^2 5x}$.
17. $y = \ln(\ln(3 - 2x^3))$.
18. $y = 5\ln^3(3x + 1)$.
19. $y = x\sin(\ln x - 10)$
20. $y = 0{,}5\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$.
21. $y = \arcsin e^{\sqrt[4]{x}}$.
22. $y = \ln\left(\sin\frac{2x+4}{9}\right)$.
23. $y = \lg^2\left(\operatorname{tg}\frac{x+1}{2}\right)$.
24. $y = \ln\left(\cos\frac{3-2x}{2}\right)$.
25. $y = \ln\left(\frac{\ln x}{x^{-6}}\right)$.
26. $y = \frac{1}{3\ln^3 7x}$.
27. $y = \ln(\lg(1 - 2x))$.
28. $y = 2\ln^{-3}(2x - 1)$.
29. $y = 2\ln\cos\frac{x}{2}$.
30. $y = 2^{x^3+1} \cdot x^3$.

4. Найти производную.

1. $y = \frac{\sin^3 5x}{\cos^2(x/3)}$.
2. $y = \frac{x^8}{8(1 - x^2)}$.
3. $y = \frac{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}}{x}$.
4. $y = \frac{x^3}{3\sqrt{(1 + x^2)^3}}$.

5. $y=\left(\frac{3}{x}\sqrt[3]{(x+1)^2}\right):\left(\frac{1}{2}x\sqrt[6]{x}\right)$.

6. $y=\frac{\sqrt[3]{(1+x^3)^8}}{8x}$.

7. $y=\frac{x^4}{(3-2x^3)^2}$.

8. $y=\frac{x^3}{3\sqrt{3-2x^3}}$.

9. $y=\frac{9x+3}{5(2+x)^5}$.

10. $y=\frac{-11-x^2}{2(x-2)^4}$.

11. $y=\frac{\sin^2 7x}{\cos^2(x/4)}$.

12. $y=\frac{x^5}{(x-x^4)^4}$.

13. $y=\frac{\sqrt{x^3+2x+3}}{x^2}$.

14. $y=\frac{x^2}{5\sqrt{(3+x^3)^3}}$.

15. $y=\frac{x^4+x}{7\sqrt{2+x^2}}$.

16. $y=\left(\frac{1}{2}\sqrt[4]{(x^2+1)^3}\right):\left(\frac{1}{4}x\sqrt[7]{x^2}\right)$.

17. $y=\frac{\sqrt{(x^6+2x)^3}}{3x^2}$.

18. $y=\frac{x^5}{(5+x^3)^2}$.

19. $y=\frac{9x}{6(2x^3+5)^3}$.

20. $y=\frac{-4+x^3}{7\sqrt[5]{(x-2)^4}}$.

21. $y=\frac{\sin^4 3x}{\cos(x/9)}$.

22. $y=\frac{x^7}{2(x+x^6)}$.

23. $y=\frac{\sqrt{x^4+3x+1}}{2x-5}$.

24. $y=\left(\frac{1}{5}\sqrt[3]{(x+1)^4}\right):\left(\frac{1}{3}x^4\cdot\sqrt[5]{x^2}\right)$.

25. $y=\frac{9x^4+3}{7\sqrt{1+x^5}}$.

26. $y=\left(\frac{1}{4}\sqrt[5]{(x-4)^2}\right):\left(\frac{1}{2}x\cdot\sqrt[8]{x^9}\right)$.

27. $y=\frac{x^5}{5\sqrt{(1+7x^4)^5}}$.

28. $y=\frac{x^4-x-1}{3(x^2+2x^3)}$.

29. $y=\frac{\sqrt{x^5+x^2+2}}{x+3}$.

30. $y=\frac{-2+x^3}{7(3x+2)^3}$.

5. Найти производную.

1. $y=\frac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4}$.

2. $y=\sqrt{\frac{(x+2)(x-1)}{(x-2)^7}}$.

3. $y=\dfrac{(x-2)^2}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$.

4. $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\cdot\sqrt{(x+3)^3}}$.

5. $y=\dfrac{(x-3)^2(2x-1)}{(x+1)^3}$.

6. $y=\sqrt[3]{\dfrac{(x-2)(x-1)^2}{(x+2)^5}}$.

7. $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}\cdot\sqrt{2x+1}}$.

8. $y=x^3\sqrt{\dfrac{x-1}{(x+2)\sqrt{x-2}}}$.

9. $y=\dfrac{\sqrt[4]{x^2+3x+1}}{\sqrt[3]{x^2+4}\cdot\sqrt{3x+5}}$.

10. $y=\dfrac{(x-1)^3}{(x+2)^6(x+1)^5}$.

11. $y=\sqrt{\dfrac{(x+5)(x-2)}{(x+3)^3}}$.

12. $y=\dfrac{(x+1)^2}{\sqrt[4]{(x+2)^4(x-1)^2}}$.

13. $y=\sqrt{\dfrac{(x+4)^5(x+2)^3}{x+3}}$.

14. $y=\dfrac{\sqrt{2x+5}}{\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot\sqrt{(x+3)^7}}$.

15. $y=\dfrac{(x-1)^2(3x+5)}{(x+7)^4}$.

16. $y=\sqrt[3]{\dfrac{(x-1)(x+6)^2}{(x+2)^5}}$.

17. $y=\dfrac{\sqrt{x+6}}{\sqrt[3]{(x+5)^2(3x+7)}}$.

18. $y=x^5\sqrt{\dfrac{x-4}{(x+1)\sqrt{x-5}}}$.

19. $y=\dfrac{\sqrt[5]{2x^2+1}}{\sqrt[3]{x^2+1}\cdot\sqrt{(x-2)^3}}$.

20. $y=\dfrac{(x-4)^5}{(x+3)^3(x+4)^6}$.

21. $y=\sqrt{\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+3)^5}}$.

22. $y=\dfrac{(x+2)^3}{\sqrt[3]{(x+3)(x+5)^5}}$.

23. $y=\sqrt{\dfrac{(x+7)^2(x+3)^2}{x-7}}$.

24. $y=\dfrac{\sqrt{3x+1}}{\sqrt[4]{2x+5}\cdot\sqrt{2x+2}}$.

25. $y=\sqrt[3]{\dfrac{(x+11)(x+5)^2}{(x+3)^2}}$.

26. $y=\dfrac{(x+1)^2(4x+1)}{(x+6)^3}$.

27. $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}\cdot(7x+1)^4}$.

28. $y=x^3\sqrt{\dfrac{x+1}{(x-2)\sqrt{x-6}}}$.

29. $y=\dfrac{\sqrt[5]{3x^2-1}}{\sqrt[3]{x+1}\cdot\sqrt{(x-2)^5}}$.

30. $y=\dfrac{(x-2)^6}{(x+1)^2(x+6)^7}$.

6. Найти производную.

1. $y=(1+x^2)^x$.
2. $y=(\lg x)^{3x}$.
3. $y=\left(\operatorname{ctg}3x\right)^{e^x}$.
4. $y=(\operatorname{tg}x)^x$.
5. $y=(4+x^2)^{\operatorname{tg}x}$.
6. $y=x^{\sin x}$.
7. $y=x^{\cos x}$.
8. $y=x^{\arcsin x}$.
9. $y=(x-5)^{\cos x}$.
10. $y=(x^4+5)^{\operatorname{ctg}x}$.
11. $y=(x^2+3)^{\cos x}$.
12. $y=(\operatorname{tg}x)^x$.
13. $y=\sqrt[x]{x}$.
14. $y=x^{\sqrt{x}}$.
15. $y=x^{(\sin x+\cos x)}$.
16. $y=(\cos x)^{\sin x}$.
17. $y=(\operatorname{arcctg}x)^x$.
18. $y=(1+x^2)^x$.
19. $y=(1+x^2)^x$.
20. $y=(\operatorname{tg}x)^{x^2}$.
21. $y=x^{x^2+3}$.
22. $y=(\sin x)^{\arcsin x}$.
23. $y=(\cos x)^{\operatorname{arctg}x}$.
24. $y=(3+x^2)^{\sqrt{x}}$.
25. $y=(1-x^2)^{\arccos x}$.
26. $y=\sqrt[x]{\operatorname{arctg}x}$.
27. $y=(x^2+4)^{3x+5}$.
28. $y=\sqrt[x]{x^2+1}$.
29. $y=(\operatorname{tg}x)^{\arccos x}$.
30. $y=x^{\operatorname{tg}x}$.

7. Доказать, что функция $y=y(x)$ удовлетворяет уравнению.

1. $y=e^x+2xe^x+e^{2x}+xe^{-x}$,
   $y'''-4y''+5y'-2y=(16-12x)e^{-x}$.
2. $y=-4+e^{2x}+9e^{-3x}+x^2e^{2x}$,
   $y'''+y''-6y'=20xe^{2x}+14e^{2x}$.
3. $y=3e^x\sin x-e^x\cos x+e^{-2x}$,
   $y''+2y'=10e^x\sin x+10e^x\cos x$.
4. $y=11-7e^{3x}+xe^{3x}+xe^{-x}$,
   $y'''-6y''+9y'+16xe^{-x}=0$.
5. $y=(0{,}13\cos x+0{,}1\sin x)e^x+e^{2x}(\cos 2x+\sin 2x)$,
   $(y''-4y'+8y)e^{-x}=0{,}66\sin x+0{,}32\cos x$.
6. $y=5\cos x-3\sin x+2(xe^x+1)$,
   $y'''-y'=10\sin x+6\cos x+4e^x$.

7. $y=-\frac{x}{2}e^{3x}+\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{6}\sin 3x+\frac{1}{3}e^{-3x}$,

$y'''-9y'=-9e^{3x}+18\sin 3x-9\cos 3x$.

8. $y=-\frac{x}{2}e^{8x}-\frac{1}{8}\sin 8x+\frac{1}{4}e^{-8x}+\frac{1}{6}$,

$y'''-64y'=-64e^{8x}+128\cos 8x$.

9. $y=3e^{x}\sin x+3-2e^{-2x}-e^{x}\cos x$,
$(y''+2y')\cdot 0{,}1=e^{x}\sin x+e^{x}\cos x$.

10. $y=\frac{1}{18}\cos 9x+\frac{1}{9}+3e^{-9x}+xe^{9x}$,

$y'''-81y'=81\cdot(2e^{9x}+\sin 9x)$.

11. $y=e^{-8x}+e^{8x}-\frac{1}{8}(4xe^{8x}+\sin 8x)$,

$y'''=64\cdot(y'-e^{8x})+128\cos 8x$.

12. $y=-3e^{x}-xe^{x}+xe^{-x}+5e^{2x}$,
$y'''+5y'=(16-12x)e^{-x}+2y+4y''$.

13. $y=5\cos x+2xe^{x}+4e^{-x}-3\sin x$,
$(y'''-y')e^{-x}=(10\sin x+6\cos x)e^{-x}+4$.

14. $y=1+e^{2x}-3e^{-3x}+x^{2}e^{2x}$,
$(y'''+y''-6y')e^{-x}=20xe^{x}+14e^{x}$.

15. $y=-\frac{x}{2}e^{3x}+\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{6}\sin 3x+e^{2}$,

$y'''+9\cdot(\cos 3x-y'+e^{3x})=18\sin 3x$.

16. $y=-0{,}04e^{2x}\sin 5x+xe^{2x}$,
$(y''-4y'+4y)e^{-x}=e^{x}\sin 5x$.

17. $y=-1+8e^{3x}+3xe^{3x}+xe^{x}$,
$y'''+9y'=4xe^{x}+6y''$.

18. $y=e^{2x}\cos 2x+0{,}13e^{x}\cos x+0{,}1e^{x}\sin x$,
$y''-4y'+8y=0{,}66e^{x}\sin x+0{,}32e^{x}\cos x$.

19. $y=(x-2)e^{9x}+\frac{1}{18}\cos 9x+e^{4}+e^{-9x}$,

$y'''=81\cdot(2e^{9x}+\sin 9x+y')$.

20. $y=-\frac{x}{2}e^{8x}-\frac{1}{8}\sin 8x+\frac{1}{8}e^{8x}$,

$y'''=128\cdot(\cos 8x+0{,}5y'-0{,}5e^{8x})$.

21. $y=-5e^{2x}+e^{-3x}+x^2e^{2x}+6e$,
$0{,}5y'''+0{,}5y''-7e^{2x}=10xe^{2x}+3y'$.

22. $y=e^{2x}-6xe^{2x}-0{,}04e^{2x}\sin 5x$,
$y''=e^{2x}\sin 5x+4(y'-y)$.

23. $y=10+3e^{x}\sin x-e^{x}\cos x-e^{-2x}$,
$e^{-x}(y''+2y')=10\cdot(\sin x+\cos x)$.

24. $y=-\frac{x}{2}e^{3x}+\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{6}\sin 3x-\frac{2}{3}e^{3x}$,

$y'''-9\cdot(y'-e^{3x})=9(2\sin 3x-\cos 3x)$.

25. $y=2e^{3x}-4xe^{3x}+xe^{x}$,
$(y'''-6y''+9y')e^{-x}-4x=0$.

26. $y=5\cos x-3\sin x+2(xe^{x}+4e^{x})$,
$y'''=2\cdot(5\sin x+3\cos x+2e^{x})+y'$.

27. $y=e^{x}+2xe^{x}+e^{2x}+xe^{-x}$,
$12xe^{-x}+y'''-4y''+5y'-2y=16e^{-x}$.

28. $y=xe^{9x}+\frac{1}{18}\cos 9x+e^{9x}+e^{-9x}$,

$y'''-81y'=162e^{9x}+81\sin 9x$.

29. $y=e^{-x}+3xe^{x}+e^{2x}+xe^{-x}$,
$y'''+2y''-7y'=2\cdot(e^{2x}+4xe^{-x}-6xe^{x})$.

30. $y=-5e^{2x}+xe^{2x}-0{,}04e^{2x}\sin 5x$,

$y''-4y'+4y=e^{2x}\sin 5x$.

V. ГРАФИКИ

1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

1. $y=2x^3-3x^2-36x+2$, [0, 3].
2. $y=4\sqrt{x}-x^2/64$, [0, 16].
3. $y=-3x^3+x$, [0, 2].
4. $y=x^3/96-2\sqrt{x}$, [0, 4].
5. $y=-2x^3+3x^2+36x-6$, [1, 3].
6. $y=3x^3-x+2$, [−2, 0].
7. $y=32\sqrt{x}-x^2$, [1, 16].
8. $y=x+4/x$, [1, 4].
9. $y=2x^3+9x^2+12x+2$, [0, 3].
10. $y=2x^3-24x$, [1, 3].
11. $y=x^3/32-6\sqrt{x}$, [0, 4].
12. $y=-x^2/2+8/x+8$, [−4, −1].
13. $y=x^3-3x^2-9x+10$, [0, −3].
14. $y=4x^3-48x-4$, [−3, 3].
15. $y=x-\sqrt{x}$, [0, 16].
16. $y=3x+27/x$, [2, 5].
17. $y=-x^3+3x^2+9x-5$, [−3, 3].
18. $y=x^3-27x$, [1, 4].
19. $y=3x^3+729/x$, [1, 3].

20. $y = 9\sqrt{x} - \sqrt{x^3}$, [1, 4].

21. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$, [–2, 3].

22. $y = x^3 - 3x^2$, [1, 3].

23. $y = 4\sqrt{x} - x$, [1, 9].

24. $y = 2x + 32/x$, [1, 8].

25. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$, [0, –2].

26. $y = x^2 - 6x$, [–5, 3].

27. $y = x^2/2 + 64/x$, [1, 16].

28. $y = 4 - x - 4/x^2$, [1, 4].

29. $y = 3 - x - 4/(x+2)^2$, [–1, 2].

30. $y = x + 5/x$, [1, 10].

2. Провести полное исследование функции и построить график.

1. $y = -3x^3 + 2x^2$.
2. $y = -x^3 - 3x^2 + 4$.
3. $y = (x+1)^2(x-1)^2$.
4. $y = -x^3 + x^2 + 5x + 3$.
5. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 13$.
6. $y = 3x^3 + 2x^2 - 5$.
7. $y = 0{,}0625\cdot(x+1)^2(x-3)^2$.
8. $y = x^3 + 3x^2 - 4$.
9. $y = x^3 - 3x^2$.
10. $y = -x^3 + 3x + 2$.
11. $y = (x-3)^2(x-1)^2$.
12. $y = 2x^3 - 3x^2 + 5$.
13. $y = 0{,}5x^3 - 0{,}5x^2 - 4x + 4$.
14. $y = -(1/3)x^4 + 2x^2$.
15. $y = (2x+1)^2(2x-1)^2$.
16. $y = x^3 - 2x^2 - 4x + 5$.
17. $y = -0{,}0625\cdot(x^2-4)^2$.
18. $y = -x^3 - x^2 + x - 1$.
19. $y = x^3 - 3x + 2$.
20. $y = x^2(x-2)^2$.
21. $y = x^3 + 6x^2 - 15x + 8$.
22. $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$.
23. $y = (x-3)^2(x+3)^2$.
24. $y = x^3 - 2x^2 + x$.
25. $y = 2 + x - 3x^3$.
26. $y = x^3 - 4x + 3$.
27. $y = (2x-1)^2(2x-3)^2$.
28. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.
29. $y = x^3 - 9x + 8$.
30. $y = 16x^2(x-1)^2$.

3. Провести полное исследование функции и построить график.

1. $y=\dfrac{x^3}{x^4-1}$.

2. $y=\dfrac{x^2}{x^3+1}$.

3. $y=\dfrac{x}{x^2-4}$.

4. $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$.

5. $y=\dfrac{x^4+1}{x^3}$.

6. $y=\dfrac{x}{x^2+1}$.

7. $y=\dfrac{x^3}{x^3+1}$.

8. $y=\dfrac{x}{(x-2)^2}$.

9. $y=\dfrac{x^2}{x^3-1}$.

10. $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$.

11. $y=\dfrac{x}{2-x^3}$.

12. $y=x^2+\dfrac{2}{x}$.

13. $y=\dfrac{2x^2+3x-5}{x-4}$.

14. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$.

15. $y=\dfrac{x+x^2}{(x-1)^2}$.

16. $y=\dfrac{2x-1}{x^2}$.

17. $y=\dfrac{x^2-4}{x^2-9}$.

18. $y=\dfrac{x^2}{x^2+3}$.

19. $y=\dfrac{x^3}{x^2+3}$.

20. $y=\dfrac{x^2+8}{(x+2)^2}$.

21. $y=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$.

22. $y=\dfrac{x^4}{x^3+1}$.

23. $y=\dfrac{2x^2-1}{x^4}$.

24. $y=\dfrac{4x}{x^2+4}$.

25. $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

26. $y=\dfrac{8x-2x^2}{(x-2)^2}$.

27. $y=\dfrac{2x-1}{x^2}$.

28. $y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$.

29. $y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{x}$.

30. $y=\dfrac{2x^3-27}{6x^2}$.

4. Провести полное исследование функции и построить график.

1. $y=\ln(x^2+4x+5)$.
2. $y=(x-1)^4e^x$.
3. $y=(2x^2+5x+2)e^x$.
4. $y=\ln(x^2+6x+12)$.
5. $y=x-\ln(x+1)$.
6. $y=(4x^2+13)e^{-x^2}$.
7. $y=\dfrac{\ln x}{x}$.
8. $y=(3x+5)e^{2x}$.
9. $y=\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$.
10. $y=(1-x^2)e^{-x^2}$.
11. $y=x^2\ln x$.
12. $y=10x\cdot e^{2x}$.
13. $y=xe^x$.
14. $y=\dfrac{1}{xe^{x^2}}$.
15. $y=\ln(x^2+8x+18)$.
16. $y=(3x+5)e^{-3x-2}$.
17. $y=x\ln x$.
18. $y=(x-1)e^{x-1}$.
19. $y=(2x+1)e^{-x^2}$.
20. $y=2e^{x^2-10x}$.
21. $y=xe^{-x}$.
22. $y=(2x+1)e^{-x}$.
23. $y=e^{x^2-6x}$.
24. $y=(x^2+1)e^x$.
25. $y=x^3\ln x$.
26. $y=(x-1)e^{1-x}$.
27. $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$.
28. $y=(x+1)\ln^2(x+1)$.
29. $y=\dfrac{1}{x^2e^{x^2}}$.
30. $y=xe^{x+1}$.

VI. ИНТЕГРИРОВАНИЕ

1. Найти интегралы, используя таблицу и основные свойства.

1. $\int\left(\frac{x^2}{3}+\frac{x^{15}}{4}+\frac{x}{12}\right)dx.$

2. $\int(x+1)(x-\sqrt{x}+1)dx.$

3. $\int\sqrt[8]{(8x)^{-7}}\,dx.$

4. $\int\frac{dx}{x^2+7}.$

5. $\int\left(\frac{3x^3-2x^2}{8x}\right)dx$.

6. $\int\frac{dx}{x^2-10}.$

7. $\int\left(7\sqrt[3]{x}+9\sqrt[5]{x}+\sqrt[4]{x^3}\right)dx.$

8. $\int\frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}.$

9. $\int\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}+3x^5\right)dx$.

10. $\int\frac{4dx}{\sqrt{2-x^2}}.$

11. $\int\left(\frac{x^4+6x}{2x}\right)dx$.

12. $\int\frac{dx}{2x^2-6}.$

13. $\int\left(\sqrt[3]{x^4}+\frac{9}{x^9}+2\right)dx.$

14. $\int\left(\frac{x^{7/2}+x^{2/7}}{x^2}\right)dx.$

15. $\int\left(\frac{x^5+2x^2-7}{x}\right)dx.$

16. $\int\left(\frac{x^6+6x^{5/2}-7}{2x^3}\right)dx.$

17. $\int\left(\frac{3+4x^2}{x}\right)dx.$

18. $\int\left(\frac{17+4\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$

19. $\int(3-x^2)^2\,dx.$

20. $\int\left(\sqrt[7]{x}+7^x\right)dx.$

21. $\int\left(\dfrac{6\cos^2 x+3}{\cos^2 x}\right)dx.$

22. $\int(2\sin x+3\cos x)dx.$

23. $\int(5e^x+2^x)dx.$

24. $\int\left(\dfrac{5}{1+x^2}+\dfrac{x^2}{4}\right)dx.$

25. $\int\left(\dfrac{x^5+3x^2}{\sqrt{5x}}\right)dx.$

26. $\int\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{7}{\sqrt[5]{x}}+1\right)dx.$

27. $\int\left(\dfrac{1-x}{x}\right)^2 dx.$

28. $\int\dfrac{\left(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x}\right)^2}{x}dx.$

29. $\int\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$

30. $\int\left(\dfrac{4-\sin^3 x}{\sin^2 x}\right)dx.$

2. Найти интегралы, используя подведение под знак дифференциала и преобразование подынтегрального выражения.

1. $\int\dfrac{1-3x}{3+2x}dx.$

2. $\int\dfrac{x^4+x^2+1}{x-1}dx.$

3. $\int\dfrac{3-2x}{7+5x^2}dx.$

4. $\int\dfrac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx.$

5. $\int e^{-(x^2+1)}x\,dx.$

6. $\int\cos\dfrac{x}{\sqrt{2}}dx.$

7. $\int\dfrac{\sin 3x}{3+\cos 3x}dx.$

8. $\int\dfrac{x}{2+3x}dx.$

9. $\int\dfrac{x}{(x+1)^2}dx.$

10. $\int\dfrac{3x+1}{\sqrt{5x^2+1}}dx.$

11. $\int\sqrt{\dfrac{\arcsin x}{1-x^2}}dx.$

12. $\int x\cdot 7^{x^2}dx.$

13. $\int\operatorname{tg} x\,dx.$

14. $\int\dfrac{x^2+1}{x-1}dx.$

15. $\int\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

16. $\int\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2-4}}dx.$

17. $\int\dfrac{\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}}{4+x^2}dx.$

18. $\int\dfrac{e^{1/x}}{x^2}dx.$

19. $\int \operatorname{ctg} x dx$.

20. $\int \frac{x^2+5x+7}{x+3} dx$.

21. $\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x} dx$.

22. $\int \frac{x}{x^2-5} dx$.

23. $\int 4^{2-3x} dx$.

24. $\int \frac{e^x}{e^x-1} dx$.

25. $\int \cos\frac{x}{4} \cdot \sin\frac{x}{4} dx$.

26. $\int \frac{2x-5}{3x^2-2} dx$.

27. $\int 3e^{-2x} dx$.

28. $\int (e^{x/2}+e^{-x/2})^2 dx$.

29. $\int \sin(2+3x) dx$.

30. $\int \cos 6x \cdot \sin^2 6x dx$.

3. Найти интегралы, используя метод интегрирования по частям.

1. $\int \ln 9x dx$.

2. $\int x \cos x dx$.

3. $\int \ln(x-7) dx$.

4. $\int x^2 2^{2x} dx$.

5. $\int x \sin 7x dx$.

6. $\int x e^{2x} dx$.

7. $\int \operatorname{arctg} 5x dx$.

8. $\int e^{-5x} x dx$.

9. $\int x^2 \cdot \ln x dx$.

10. $\int (3x+5)\cos x dx$.

11. $\int \sqrt{x} \ln x dx$.

12. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$.

13. $\int \arcsin x dx$.

14. $\int x \cdot 2^{-x} dx$.

15. $\int (4-3x)e^{-2x} dx$.

16. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$.

17. $\int (x^2+1)e^{-8x} dx$.

18. $\int 6x \cdot \sin x dx$.

19. $\int \ln^2 x dx$.

20. $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

21. $\int \arcsin 4x dx$.

22. $\int x \ln(x-1) dx$.

23. $\int x \cdot \operatorname{arctg} x dx$.

24. $\int (x^2-2x+3)\ln x dx$.

25. $\int \ln(x^2+1)dx$.

26. $\int (x^2+7x+1)\cos x dx$.

27. $\int (2-4x)\sin 2x dx$.

28. $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$.

29. $\int (x+5)e^{3x}dx$.

30. $\int (x^2-1)e^{9x}dx$.

4. Найти интегралы от рациональных функций.

1. $\int \frac{dx}{(x+1)x}$.

2. $\int \frac{xdx}{(x^2+1)x}$.

3. $\int \frac{dx}{x^2+x}$.

4. $\int \frac{dx}{(x+7)(x+2)}$.

5. $\int \frac{dx}{(x+1)^2 x}$.

6. $\int \frac{dx}{x^3-x^2}$.

7. $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

8. $\int \frac{dx}{x^2-x+3}$.

9. $\int \frac{4x^2-x+3}{x^2(x-1)}dx$.

10. $\int \frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}dx$.

11. $\int \frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)}dx$.

12. $\int \frac{x^2-5x+9}{x^3-5x^2+6x}dx$.

13. $\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx$.

14. $\int \frac{x+2}{(x-3)(x-4)}dx$.

15. $\int \frac{2x-7}{x^2+8}dx$.

16. $\int \frac{5x^2+1}{x^3-5x^2+4x}dx$.

17. $\int \frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}dx$.

18. $\int \frac{2x^2-1}{x^3-x^2-6x}dx$.

19. $\int \frac{x^2-x+4}{(x+1)(x-2)(x-3)}dx$.

20. $\int \frac{x+4}{x^3+x^2-6x}dx$.

21. $\int \frac{3}{(x+1)(x-5)(x+3)}dx$.

22. $\int \frac{x^2+1}{x^4+3x^2}dx$.

23. $\int \frac{x^2+x+5}{x(x-2)(x+3)}dx$.

24. $\int \frac{1}{(x+5)(x+6)}dx$.

25. $\int \frac{2x+5}{x^2+1}dx$.

26. $\int \frac{2x+3}{(x+5)(x-2)}dx$.

27. $\int \frac{x^2-2}{4x^3-x}dx.$ 28. $\int \frac{x+5}{x^2+x-12}dx.$

29. $\int \frac{x^2+4}{x^5-16x}dx.$ 30. $\int \frac{dx}{x(x^2+2)}.$

5. Найти интегралы, используя указанную замену переменных.

1. $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{2x+\sqrt{4x}}dx,\ x=t^4.$

2. $\int \cos^3 2x\cdot\sin^4 2x dx,\ \sin 2x=t.$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-1}-\sqrt[4]{3x-1}},\ 3x-1=t^4.$

4. $\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^2}dx,\ x=2\operatorname{tg} t.$

5. $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+4x}{x}}dx,\ \frac{1+4x}{x}=t^2.$ 6. $\int x^3\sqrt{1-x^2}dx,\ x=\sin t.$

7. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-2}}dx,\ x-2=t^2.$ 8. $\int \cos^6 x\sin x dx,\ t=\cos x.$

9. $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x-2}{x}}dx,\ \frac{x-2}{x}=t^2.$ 10. $\int \frac{\cos 2x}{8-\sin 2x}dx,\ \sin 2x=t.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{(x-1)^2}},\ x-1=t^2.$

12. $\int \frac{dx}{5\sin^2 x+\cos^2 x},\ \operatorname{tg} x=t.$

13. $\int \frac{3x}{\sqrt[3]{x-3}}dx,\ x-3=t^3.$ 14. $\int \sqrt{16-x^2}dx,\ 4\sin t=x.$

15. $\int \frac{1}{(2-\sqrt[3]{x})\sqrt{2x}}dx,\ x=t^6.$ 16. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{4+\sin^2 x}}dx,\ \sin x=t.$

17. $\int \frac{\sqrt{2x}-1}{\sqrt[3]{2x}+1}dx,\ 2x=t^6.$ 18. $\int \cos^6 x\sin^3 x dx,\ t=\cos x.$

19. $\int \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}}dx,\ 1+x=t^6.$

20. $\int \cos^4 3x \sin^3 3x dx,\ t = \cos 3x.$

21. $\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}} dx,\ 1+x = t^2.$ 22. $\int \frac{2\sin 3x}{1-\cos 3x} dx,\ \cos 3x = t.$

23. $\int \frac{\sqrt{x-5}}{x+2} dx,\ x-5 = t^2.$ 24. $\int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}},\ x = 3\sin t.$

25. $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x+1}{x}} dx,\ \frac{x+1}{x} = t^2.$ 26. $\int \frac{dx}{-2\sin x + \cos x},\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t.$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{x+3}},\ x+3 = t^4.$ 28. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}},\ x = 2\operatorname{tg} t.$

29. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}+4\right)},\ x = t^3.$ 30. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 4\cos^2 x},\ \operatorname{tg} x = t.$

6. Найти интегралы, используя метод интегрирования по частям.

1. $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x dx.$ 2. $\int\limits_0^2 x e^{-x} dx.$

3. $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}} x^2 \cos 2x dx.$ 4. $\int\limits_1^e x \ln x dx.$

5. $\int\limits_0^\pi x^2 \sin x dx.$ 6. $\int\limits_0^\pi x \cos x dx.$

7. $\int\limits_0^3 \frac{x+5}{e^x} dx.$ 8. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2 x} dx.$

9. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (4x-2)\cos x dx.$ 10. $\int\limits_0^1 x \operatorname{arctg} x dx.$

11. $\int\limits_1^{e^3} \ln x dx.$ 12. $\int\limits_0^\pi x \sin 7x dx.$

13. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx.$

14. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (3x+5)\cos x dx.$

15. $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx.$

16. $\int\limits_0^{\pi} (2x-4)\sin x dx.$

17. $\int\limits_1^2 \ln\left(x^2\right) dx.$

18. $\int\limits_0^{\ln 2} xe^x dx.$

19. $\int\limits_0^1 (1-x)^2 e^x dx.$

20. $\int\limits_1^2 x^3 \ln x dx.$

21. $\int\limits_0^{\ln 3} (5+x)e^{3x} dx.$

22. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x^2 \cos x dx.$

23. $\int\limits_1^4 x^2 \ln(6x) dx.$

24. $\int\limits_0^{\ln 2} (2x-3)e^{-x} dx.$

25. $\int\limits_0^{0,5} \arccos x dx.$

26. $\int\limits_0^1 x^2 3^{x+1} dx.$

27. $\int\limits_0^{\ln 2} (x+2)e^{4x} dx.$

28. $\int\limits_0^{\ln 2} x^2 e^{-3x} dx.$

29. $\int\limits_1^2 (x-1)2^x dx.$

30. $\int\limits_0^{0,5} \arcsin x dx.$

7. Найти интегралы, используя указанную замену переменных.

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x}$, $\operatorname{tg} x = t$.

2. $\int\limits_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{8x}\left(\sqrt[3]{8x}+1\right)}$, $8x = t^3$.

3. $\int\limits_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$, $3\sin t = x$.

4. $\int\limits_0^3 \frac{x}{\sqrt[3]{8x+3}} dx$, $8x+3 = t^3$.

5. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}$, $x = \operatorname{tg} t$.

6. $\int\limits_{1}^{4} \frac{dx}{\sqrt{4x} + \sqrt[4]{4x}}$, $4x = t^4$.

7. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{7\sin^2 x + 3\cos^2 x}$, $\operatorname{tg} x = t$.

8. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x+1} - \sqrt{(x+1)^2}}$, $x+1 = t^2$.

9. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{2\sin x - \cos x}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.

10. $\int\limits_{3}^{4} \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x-2}{x}}\,dx$, $\frac{x-2}{x} = t^2$.

11. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3 - \sin x}\,dx$, $\sin x = t$.

12. $\int\limits_{4}^{6} \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x-4}{2x}}\,dx$, $\frac{x-4}{2x} = t^2$.

13. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$, $x = \sin t$.

14. $\int\limits_{1}^{4} \frac{\sqrt{x}}{x+2}\,dx$, $x = t^2$.

15. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin x\,dx$, $t = \cos x$.

16. $\int\limits_{2}^{5} \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx$, $x - 1 = t^2$.

17. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x}{4 - \cos x}\,dx$, $\cos x = t$.

18. $\int\limits_{0}^{0,5} \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}\,dx$, $1 - x = t^2$.

19. $\int\limits_{0}^{1} x^3\sqrt{4-x^2}\,dx$, $x = 2\sin t$.

20. $\int\limits_{1}^{2} \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+x}{5x}}\,dx$, $\frac{1+x}{5x} = t^2$.

21. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \cdot \sin^6 x\,dx$, $\sin x = t$.

22. $\int\limits_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}\,dx$, $x = t^6$.

23. $\int\limits_{1}^{2} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx$, $x = \operatorname{tg} t$.

24. $\int\limits_{2}^{4} \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}$, $2x - 1 = t^4$.

25. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x \sin^2 x\,dx$, $t = \sin x$.

26. $\int\limits_{0}^{3} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1}\,dx$, $x = t^6$.

27. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^3 x dx,\ t=\cos x.$ 28. $\int\limits_1^{16} \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}} dx,\ x=t^4.$

29. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sqrt{6-\sin^2 x}} dx,\ \sin x=t.$ 30. $\int\limits_1^{64} \frac{1}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}} dx,\ x=t^6.$

8. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми, изобразить эту фигуру.

1. $y=6x-x^2,\ y=0.$ 2. $y=e^{-x},\ x=2,\ x=0,\ y=-5.$
3. $y=x^2+4x,\ y=0.$ 4. $y=0{,}25x^3,\ y=0,\ x=2,\ x=0.$
5. $y=0{,}25x^3,\ y=0,\ x=2.$ 6. $y=\ln x^3,\ y=0,\ x=e,\ x=e^2.$
7. $y=\sqrt{4-x^2},\ x+y=2.$ 8. $y=2x^2,\ y=0,\ x=1,\ x=2.$
9. $y=x,\ x+y=3,\ x=0.$ 10. $y=4-x^2,\ y=x^2-2x.$
11. $y=\sin x,\ y=0,\ x=0,\ x=\pi.$ 12. $y=x^2-4x+3,\ y=0.$
13. $y=x^2-6x,\ y=0,\ x=1,\ x=4.$
14. $y=3x^{-1},\ x+y=4.$
15. $y=x^2-4,\ y=-x^2+4.$ 16. $y=x^{-1},\ x=2,\ x=4,\ y=-3.$
17. $y=\cos x,\ x=\pi/2,\ x=0,\ y=0.$
18. $y=6-x,\ y=6+x,\ x=6.$
19. $y=x^2+6x+5,\ y=0.$ 20. $y=x^3,\ x+y=2,\ x=0.$
21. $y=x^2,\ x=-3,\ y=0.$ 22. $4y=x^2,\ y=4.$
23. $y=\sqrt{x},\ x=4,\ 2y=-x.$ 24. $y=2x^2+3x-9,\ y=0.$
25. $x-y=0,\ x=-9,\ y=\sqrt{-x}.$
26. $y=2\sqrt{x},\ x=1,\ x=4,\ y=-5.$
27. $y=\sqrt{1-x^2},\ y=x^2.$ 28. $y=(x+2)^2,\ y=4-x.$
29. $xy=9,\ x=1,\ x=5,\ y=-4.$ 30. $y=x^3,\ x=0,\ y=-2x+12.$

VII. РЯДЫ

1. Исследовать сходимость числового ряда.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{100}}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{(n+1)!}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{n!}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(n+4)!}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{16}}{n!}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\cdot 2^n}{2n+3}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+100}{n!}$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2}{(2n)!}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{n^3}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n(n+1)}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^2+4}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5}{3^n\cdot n}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(3n)!}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{(3n)!}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{3^n}$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 5^n}{10^n}$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2\cdot 7\cdots(5n-3)}$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+4)!}{(2n)!}$.

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cdot n^2}{8^n}$.

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n\cdot(n+40)}$.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{7^n}$.

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4^n+6}$.

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{9^n\cdot n}$.

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2\cdot 5\cdots(3n-1)}$.

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{(4n)!}$.

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{100^n}{(n+3)!}$.

2. Исследовать сходимость числового ряда.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n+8}+6}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^{12}+3}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5+1}{n(n^3+2)}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{4n+2}\right)^n$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+7}{\sqrt{n}(n^3+6)}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{n^3+1}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n^2+1}}{\sqrt[6]{n^7+1}}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n^2+1}(n-1)}{\sqrt[6]{n^7+1}(n+7)}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^6}{\sqrt{n^{12}+1}+n}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{n^2}{n^5+3}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{9n+2}\right)^n$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[5]{n^8+3}}{\sqrt[4]{n^6+2}}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n+4}(n^2+1)}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{4\sqrt{n}}{n^3+2}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}(n+3)}{\sqrt[3]{n^6+1}\cdot(\sqrt{n}+7)}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^8+2}}{\sqrt[5]{n^{11}+9}}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^{12}+4}}{\sqrt{n}(n^3+6)}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n+100}\right)^n$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n^4+1}{n^8+1}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{n+2}\right)^n$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi n^2}{\sqrt{n^3+1}}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+7}{\sqrt{n^4+5}(n^3+3)}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^9+n}}{\sqrt[4]{n^8+1}}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5+3}{\sqrt{n^4+1}+n^7}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+1}\cdot(n^3+1)}{\sqrt[3]{n^7+1}(n+5)}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{12n+1}+\sqrt{n+1}}$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{5n^3+n}{3n^9+1}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2}{\sqrt{15n+3}+\sqrt{2n+1}}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^4+1}\cdot(\sqrt{n}+2)}{\sqrt{n^5+1}\cdot(n^2+3)}$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{7n+5}\right)^n$.

3. Исследовать абсолютную и условную сходимость числового ряда.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5n}{2^n}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{4^n}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n-\sqrt{n}}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{4^n}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4n}{99n+4}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(3n-2)!}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n+1}{n(n+2)}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{tg}\frac{1000}{6n}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{1}{n^6}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^n}{(2n)!}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sqrt{\frac{1}{2n+3}}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(n+8)n}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n\cdot 7^n}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+3)!}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n)^n}{(3n+5)^n}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{10^{10}}{\sqrt[10]{n}}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n+1}{n(n+2)}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{n^2+1}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^n}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{tg}\frac{\sqrt{n}}{n+2}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{3}{3n+1}\right)^n$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{tg}\frac{2}{3n+1}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(n+1)^n}{(n^3+1)^n}$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{\sqrt{n+10}}{(n+1)\sqrt{n}}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}+1}{5n^2}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3n+7}{(3n)!}$.

4. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{2^n}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2n+1}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n\cdot 10^{n-1}}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)^2}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+7)^n}{n\cdot 5^n}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}n!(x+5)^n$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-4)^n}{2n-1}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{4^n n\sqrt{n}}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{n^2+1}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}2^n(x-5)^n$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+8)^n}{2^n}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{(2n-1)(2n-1)!}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n+1}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-4)^n}{2n-1}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(x+2)^n}{n!}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{3n-1}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x+8)^n}{n!}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n}x^n$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{(n+1)^2}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(3n-1)\cdot 4^n}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n}{n+1}\right)^{n}(x-2)^n$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^n}{2n}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{2n\cdot 4^n}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+1)^3}$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n^2\sqrt{2n}}$.

5. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням $(x-x_0)$.

1. $y=\ln(5x+3)$, $x_0=1$.
2. $y=x\cos 5x$, $x_0=0$.
3. $y=\sin\dfrac{\pi x}{4}$, $x_0=2$.
4. $y=\sin(2x^2)$, $x_0=0$.
5. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, $x_0=2$.
6. $y=\cos\left(\dfrac{2x^3}{3}\right)$, $x_0=0$.
7. $y=\dfrac{1}{5+2x}$, $x_0=-3$.
8. $y=e^{3x}$, $x_0=-4$.
9. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$, $x_0=0$.
10. $y=\dfrac{x^5}{\sqrt{e^x}}$, $x_0=0$.
11. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$, $x_0=4$.
12. $y=e^{-x^4}$, $x_0=0$.
13. $y=\dfrac{1}{(3-x)^2}$, $x_0=2$.
14. $y=\dfrac{1}{1-3x^2}$, $x_0=0$.
15. $y=e^x$, $x_0=-1$.
16. $y=x\operatorname{ch}x$, $x_0=0$.
17. $y=\dfrac{x^2}{1+x}$, $x_0=0$.
18. $y=\dfrac{e^x-1}{x}$, $x_0=0$.
19. $y=x^2\ln(x)$, $x_0=1$.
20. $y=xe^{-x^2}$, $x_0=0$.
21. $y=xe^{-2x}$, $x_0=-2$.
22. $y=\dfrac{1}{1-x^2}$, $x_0=0$.
23. $y=\sin\dfrac{\pi x}{3}$, $x_0=1$.
24. $y=x\ln(1-x)$, $x_0=0$.
25. $y=\dfrac{1}{x}$, $x_0=-2$.
26. $y=\sqrt{1+2x}$, $x_0=0$.
27. $y=\ln(5x)$, $x_0=2$.
28. $y=x\cos(4x^2)$, $x_0=0$.
29. $y=\dfrac{1}{4-x^4}$, $x_0=0$.
30. $y=\cos(2x)$, $x_0=\pi$.

6. Разложив подынтегральную функцию в ряд, проинтегрировать и вычислить с точностью до 0,01.

1. $\displaystyle\int_0^{0,1} e^{-x}dx$.
2. $\displaystyle\int_0^{0,3} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$.
3. $\displaystyle\int_0^{0,2} \cos x^2 dx$.
4. $\displaystyle\int_0^{0,7} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}dx$.

5. $\int\limits_{1}^{0} e^{-2x^3}dx.$

6. $\int\limits_{0}^{0,8} \frac{x}{1+x^2}dx.$

7. $\int\limits_{0}^{0,9} \frac{x+5}{e^x}dx.$

8. $\int\limits_{0}^{0,9} \frac{\ln(1+x^5)}{x^2}dx.$

9. $\int\limits_{0,2}^{0} \frac{\sin x^2}{x}dx.$

10. $\int\limits_{0}^{1} \cos(x^3)dx.$

11. $\int\limits_{0}^{1} x^2e^{-x^2}dx.$

12. $\int\limits_{0}^{0,9} x\sin\sqrt{x}dx.$

13. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x}{x^5+2}dx.$

14. $\int\limits_{1}^{0} x\cos x^6 dx.$

15. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sin(x^3)}{x^2}dx.$

16. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^4}}dx.$

17. $\int\limits_{0}^{0,2} \cos(x^7)dx.$

18. $\int\limits_{0}^{1} xe^{-x^6}dx.$

19. $\int\limits_{0,2}^{0} \frac{x}{1+\sqrt[8]{x}}dx.$

20. $\int\limits_{0}^{0,8} \sqrt{1+x^3}dx.$

21. $\int\limits_{0}^{1} x^{10}e^{-x}dx.$

22. $\int\limits_{1}^{0} x^{11}\cos x dx.$

23. $\int\limits_{0}^{0,2} \frac{1-\cos x^4}{x}dx.$

24. $\int\limits_{0}^{0,9} \sqrt[3]{1+x^6}dx.$

25. $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^{-x^2}-1}{x^2}dx.$

26. $\int\limits_{0}^{0,8} \frac{x}{(1+x^3)^2}dx.$

27. $\int\limits_{1}^{0} \frac{1-\cos(2x^2)}{x^3}dx.$

28. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln(1+x^4)}{\sqrt[4]{x}}dx.$

29. $\int\limits_{0}^{1} \frac{2x-\sin 2x}{\sqrt{x}}dx.$

30. $\int\limits_{0}^{0,25} \frac{\ln(1+3x)-3x}{x}dx.$

7. Разложить в ряд Фурье заданную функцию $y=F(x)$ по указанной системе функций на указанном отрезке, N — номер варианта, m — натуральное число. Построить графики исходной функции и частичных сумм ряда Фурье: S_5, S_{10}, S_{50}, S_{100}. Проанализировать, какая частичная сумма ряда Фурье дает хорошее приближение исходной функции.

$$y=(N-10)\cdot x^2+Nx,$$

1) если $N=4m$, то по $\left\{\cos\frac{nx}{N}\right\}$ на $[0;\,N\pi]$;

2) если $N=4m+1$, то по $\left\{\sin\frac{nx}{N}\right\}$ на $[-N\pi;\,0]$;

3) если $N=4m+2$, то по $\left\{\cos\frac{nx}{N}\right\}$ на $[-N\pi;\,0]$;

4) если $N=4m+3$, то по $\left\{\sin\frac{nx}{N}\right\}$ на $[0;\,N\pi]$.

8. Разложить в ряд Фурье заданную функцию $y=F(x)$ по указанной системе функций на указанном отрезке, N — номер варианта. Построить графики исходной функции и частичных сумм ряда Фурье: S_1, S_4, S_{10}, S_{20}. Проанализировать, какая частичная сумма ряда Фурье дает хорошее приближение исходной функции.

$$y=\begin{cases}-N & \text{при } x\in\left[-\pi;\,-\frac{\pi}{N}\right],\\ -N & \text{при } x\in\left(-\frac{\pi}{N};\,\frac{\pi}{N}\right),\\ N-x & \text{при } x\in\left[\frac{\pi}{N};\,\pi\right]\end{cases}$$

по $\{\sin nx,\,\cos nx\}$ на $[-\pi;\,\pi]$.

9. Разложить в ряд Фурье заданную функцию $y=F(x)$ по указанной системе функций на указанном отрезке, N — номер варианта. Построить графики: исходной функции и не менее трех частичных сумм ряда Фурье (номера выбрать самостоятельно). Проанализировать, какая частичная сумма ряда Фурье дает хорошее приближение исходной функции.

$$y=\sin^{|N-3|}(Nx)\cos x+\cos^2(Nx)\sin^{|10-N|}x$$

по $\{\sin nx,\,\cos nx\}$ на $[-\pi;\,\pi]$.

VIII. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Найти частные производные.

1. $z = 2x^2y + 3xy^2 + x^3$.

2. $u = xy + y\sqrt[4]{z} + xz$.

3. $z = x^3 + \sqrt{y} - 5xy$.

4. $z = x\sin(xy^2)$.

5. $z = \exp(-x^2y^2)$.

6. $z = x\sin(x + y)$.

7. $u = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{z}{xy}\right)$.

8. $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

9. $z = \ln(x^3 + xy + 2y^3)$.

10. $z = x\cos(2xy)$.

11. $z = \dfrac{x}{\sqrt{4x^2 + y^2}}$.

12. $z = 3^{\ln(x + 2y)}$.

13. $z = \sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{x}{y}$.

14. $u = x^3 + y^5 - 4x^2z^2$.

15. $u = \ln\left(3z + \sqrt{8x^2 + y^2}\right)$.

16. $u = \sqrt{5x^2 + y^2x - z^2}$.

17. $z = \arccos\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

18. $z = \operatorname{tg}\left(\dfrac{y^2}{x}\right)$.

19. $u = \dfrac{\sqrt{x}}{y} + \dfrac{y}{\sqrt{z}} + \dfrac{z}{x}$.

20. $z = 7x^3y - xy^7$.

21. $z = \ln\sqrt{x^2y + 9y^2}$.

22. $z = \exp\left(\sin x\sqrt[3]{y}\right)$.

23. $z = xy\arcsin x^2$.

24. $u = y\sqrt{x} + yz + x\sqrt{z}$.

25. $z = x\exp(x^2 - y^2)$.

26. $z = \arcsin\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

27. $u=\sin(x^2yz^2)$.

28. $z=\cos(x^2y^3)$.

29. $z=z\,\mathrm{arctg}(xy)^2$.

30. $z=5^{3x^2-y^2}$.

2. Для функции $u=u(x, y, z)$ найти градиент и производную по направлению $\vec{l}$ в точке M.

1. $u=2x^2+3xy+zy$, $\vec{l}=\{3, 4, 0\}$, $M(1, -1, 1)$.
2. $u=x^2+xy-2zy$, $\vec{l}=\{1, 2, 2\}$, $M(1, 2, 1)$.
3. $u=3x^2-4xy+3zy$, $\vec{l}=\{0, 3, 4\}$, $M(-2, 1, 1)$.
4. $u=2x^2-3yz+2zx$, $\vec{l}=\{2, 1, -2\}$, $M(-1, 1, 4)$.
5. $u=2xy+zy-5xz^2$, $\vec{l}=\{-4, 0, 3\}$, $M(0, 1, 5)$.
6. $u=3xy^2-2x^2-5zy$, $\vec{l}=\{2, -2, 1\}$, $M(1, -1, 0)$.
7. $u=x^2y^2+x^2z^2+z^2y^2$, $\vec{l}=\{1, 4, 0\}$, $M(0, 1, -5)$.
8. $u=x^2y-z^2+2zy^2$, $\vec{l}=\{-1, 2, 2\}$, $M(1, 3, -4)$.
9. $u=xy+2xz^2-zy$, $\vec{l}=\{-3, 4, -1\}$, $M(2, 1, 5)$.
10. $u=2x^2y-xz+z^2y$, $\vec{l}=\{-2, 4, -4\}$, $M(3, 1, -6)$.
11. $u=x^2-5xy^2+3zy$, $\vec{l}=\{4, 0, 3\}$, $M(2, 2, 1)$.
12. $u=4x^2y-3xy+xz^2$, $\vec{l}=\{-2, 2, 1\}$, $M(3, 2, 1)$.
13. $u=3xy^2+3yz^2-zy^2$, $\vec{l}=\{1, 2, 0\}$, $M(1, 2, 1)$.
14. $u=x^2y-4yz+5z^2x$, $\vec{l}=\{1, -2, 2\}$, $M(2, 1, 1)$.
15. $u=5xy-yz^2-zx^2$, $\vec{l}=\{0, 1, 2\}$, $M(2, 2, 1)$.
16. $u=x^2+5xy-zy^2$, $\vec{l}=\{2, -1, 2\}$, $M(1, 1, 1)$.
17. $u=3x-4yx^2+yz^2$, $\vec{l}=\{2, 2, 1\}$, $M(-3, 2, 1)$.
18. $u=5x^2+3xy^2-2yz$, $\vec{l}=\{2, -2, 1\}$, $M(2, 1, 1)$.
19. $u=2x-yx^2+5zy^2$, $\vec{l}=\{-1, 2, 0\}$, $M(1, 3, 1)$.
20. $u=xy^2-2xy+3zx^2$, $\vec{l}=\{1, 2, -1\}$, $M(3, 1, 1)$.
21. $u=x^2y+3yz-xz^2$, $\vec{l}=\{0, -1, 2\}$, $M(1, 1, 3)$.
22. $u=xz^2+2yz^2-3zx^2$, $\vec{l}=\{1, 2, -2\}$, $M(2, 1, 2)$.
23. $u=x^2z-5y^2z+yz^2$, $\vec{l}=\{-2, 0, 1\}$, $M(3, 1, 3)$.
24. $u=2xy+yz^2-2zy^2$, $\vec{l}=\{1, 2, -2\}$, $M(2, 2, 1)$.
25. $u=3xy^2-3yz^2-3zx^2$, $\vec{l}=\{1, -2, 0\}$, $M(1, 2, 2)$.

26. $u = 5x^2y - yz^2 + zx^2$, $\vec{l} = \{2, 1, -2\}$, $M(1, 3, 2)$.

27. $u = 5xz^2 + yx^2 - xz^2$, $\vec{l} = \{0, 1, -2\}$, $M(1, 1, 2)$.

28. $u = 3xz - 2xy^2 - 2yz$, $\vec{l} = \{2, 2, 1\}$, $M(2, 2, 1)$.

29. $u = 5xy + 3yx^2 + zy^2$, $\vec{l} = \{2, 0, -1\}$, $M(2, 3, 1)$.

30. $u = 4xy + zx^2 - 3zy^2$, $\vec{l} = \{0, 3, -4\}$, $M(1, 1, 3)$.

3. Найти уравнения касательной плоскости и нормали в указанной точке.

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $M(2, 1, 2)$.
2. $x^2 + 2x + y^2 - z^2 = 15$, $M(2, 1, 2)$.
3. $2x^2 - y^2 - z^2 = 16$, $M(4, 0, 4)$.
4. $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0$, $M(1, 1, 1)$.
5. $2x^2 + y^2 - 2z = 0$, $M(-2, 2, 6)$.
6. $x^2 + y^2 - 2y + z^2 = 15$, $M(0, 1, 4)$.
7. $x^2 + 4x + y^2 - z^2 + 2z = 33$, $M(-2, 6, 1)$.
8. $x^2 - 2y^2 - z^2 = 28$, $M(6, 4, 0)$.
9. $3x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$, $M(-1, 1, 1)$.
10. $x^2 + 2x + y^2 + z^2 = 8$, $M(-1, 0, 3)$.
11. $x^2 + y^2 - 2z = 0$, $M(-2, 2, 4)$.
12. $x^2 + y^2 - z^2 + 2z = 5$, $M(0, 2, 1)$.
13. $3x^2 - y^2 - z^2 = 28$, $M(-4, 2, 4)$.
14. $2x^2 + y^2 - 3z^2 = 0$, $M(-1, 1, 1)$.
15. $x^2 + 2y^2 - 2z = 0$, $M(-2, 1, 3)$.
16. $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 3$, $M(-2, 0, 1)$.
17. $x^2 + y^2 + 2y - z^2 = 8$, $M(3, -1, 0)$.
18. $x^2 - y^2 - 2z^2 = 18$, $M(6, 0, 3)$.
19. $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$, $M(-2, 2, 4)$.
20. $x^2 + 4y^2 - 6z = 0$, $M(-6, 0, 6)$.
21. $x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 = 7$, $M(1, 1, -3)$.
22. $x^2 + y^2 - z^2 = 36$, $M(4, 6, -4)$.
23. $x^2 - y^2 - z^2 = 11$, $M(6, -5, 0)$.
24. $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$, $M(2, -2, 4)$.

25. $x^2+y^2-z^2=0$, $M(-1, 0, 1)$.

26. $2x^2+3y^2-4z=0$, $M(2, -2, 5)$.

27. $2x^2-y^2-4z=0$, $M(2, 2, 1)$.

28. $x^2-3y^2-3z^2=21$, $M(-6, 2, 1)$.

29. $x^2-y^2-2z^2=0$, $M(2, 4, -6)$.

30. $x^2+2y^2+2z^2=4$, $M(0, 1, -1)$.

4. Провести исследование функции на экстремум.

1. $z=x^3-y^3-3x^2+3y-24x$.
2. $z=2xy^2-2x^3+2y^2+24x$.
3. $z=4xy+x^2+y^2-6y$.
4. $z=x^3+2xy+2y^2+2x^2-36x$.
5. $z=x^3-6xy+3y^2-18x-6y$.
6. $z=x^3+2xy-y^2-7x+2y$.
7. $z=-4xy+8x^2+4y^2-4y$.
8. $z=x^3-6xy+3y^2-9x$.
9. $z=x^2y+2x^2-3y^2+4y$.
10. $z=y^3-4xy-4x^2-y^2-27y$.
11. $z=xy^2-2x^3+2y^2+8x$.
12. $z=y^3+6xy+3x^2+6y^2-9y$.
13. $z=x^2+6xy-4y^3$.
14. $z=y^3+3x^2y-3x^2-12y$.
15. $z=4xy-2x^2-y^3+4y$.
16. $z=2x^3+12xy-3y^2+18x$.
17. $z=x^3-y^3-3x+12y$.
18. $z=xy-x^2+3x-y$.
19. $z=2xy+x+2y^2+2y$.
20. $z=2x^3+2xy+y^2-4x$.
21. $z=x+3y+4x^2+3y^2$.
22. $z=2x^3-6xy-6x^2+3y^2$.
23. $z=x^3-24xy-8y^3$.
24. $z=8xy+6x^3+4y^2-5x^2$.
25. $z=x^2+2xy+4y^2+6y$.
26. $z=x-y-4x^2-2y^2$.
27. $z=x^2+2xy+4y^2+4y$.
28. $z=y^3+3xy-x^3$.
29. $z=2x^3+6xy-y^2+12x$.
30. $z=2x-2xy+y^2-4y$.

5. Применяя метод градиента, найти экстремум функции на заданном множестве.

1. $f(x, y)=x+y$;
$$\begin{cases} x+2y\le 0, \\ x-2y-15\le 0, \\ 2x+y+7\ge 0. \end{cases}$$

2. $f(x, y)=x+y+1$;
$$\begin{cases} x\le 6, \\ y\le 3, \\ x+2y\ge 0. \end{cases}$$

3. $f(x, y) = x - y;$
$$\begin{cases} x + 2y \ge 0, \\ x - 2y + 15 \ge 0, \\ 2x + y - 6 \le 0. \end{cases}$$

4. $f(x, y) = x - y + 1;$
$$\begin{cases} 2x + y - 3 \le 0, \\ x - 2y - 15 \le 0, \\ x \ge 0. \end{cases}$$

5. $f(x, y) = x - y - 2;$
$$\begin{cases} 2x - y + 4 \ge 0, \\ x + 3y + 15 \ge 0, \\ x \le 0. \end{cases}$$

6. $f(x, y) = 2x + y - 3;$
$$\begin{cases} x \ge -4, \\ y \le 2, \\ x - 2y \le 0. \end{cases}$$

7. $f(x, y) = 2x - y + 6;$
$$\begin{cases} x \le 8, \\ x + y \le 9, \\ 2x + y \ge 0. \end{cases}$$

8. $f(x, y) = x - 2y - 2;$
$$\begin{cases} 3x - y \ge 0, \\ x - 2y - 9 \le 0, \\ 2x + y - 2 \le 0. \end{cases}$$

9. $f(x, y) = 3x - y + 3;$
$$\begin{cases} 2x - 2y \le 7, \\ x + 2y + 9 \ge 0, \\ y \le 0. \end{cases}$$

10. $f(x, y) = x - 4y - 4;$
$$\begin{cases} 4x + 2y \ge -1, \\ x - 2y - 9 \le 0, \\ y \le 0. \end{cases}$$

11. $f(x, y) = x + 3y - 6;$
$$\begin{cases} x - 2y + 9 \ge 0, \\ 2x + y + 2 \ge 0, \\ y \ge 2x. \end{cases}$$

12. $f(x, y) = x + 2y + 3;$
$$\begin{cases} x + 3y - 9 \le 0, \\ 2x - y + 4 \le 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$$

13. $f(x, y) = x + y;$
$$\begin{cases} x + 4y \le 0, \\ x - y - 6 \le 0, \\ 3x + y + 9 \ge 0. \end{cases}$$

14. $f(x, y) = x - y - 3;$
$$\begin{cases} x \le 4, \\ x + y \le 1, \\ x + 3y \ge 0. \end{cases}$$

15. $f(x, y) = x - y + 5;$
$$\begin{cases} x + y \ge 0, \\ x - 4y + 16 \ge 0, \\ 3x + y - 12 \le 0. \end{cases}$$

16. $f(x, y) = 2x - y + 7;$
$$\begin{cases} x + y - 8 \le 0, \\ x - 4y - 20 \le 0, \\ x \ge 0. \end{cases}$$

17. $f(x, y) = -2x + y - 1;$
$$\begin{cases} x - y + 5 \ge 0, \\ x + 3y + 9 \ge 0, \\ x \le 0. \end{cases}$$

18. $f(x, y) = x + 3y - 7;$
$$\begin{cases} x \ge -3, \\ 3x + y \le 0, \\ x + y + 1 \ge 0. \end{cases}$$

19. $f(x, y) = 4x + y + 1;$
$$\begin{cases} 5x + 2y \le 6, \\ y \le 8, \\ 2x + y \ge 0. \end{cases}$$

20. $f(x, y) = x - 3y + 1;$
$$\begin{cases} 5x - y \ge 0, \\ x - 2y - 4 \le 0, \\ 4x + y - 16 \le 0. \end{cases}$$

21. $f(x, y) = -x + y - 1;$
$$\begin{cases} 4x - y \le 8, \\ x + y + 1 \ge 0, \\ y \le 0. \end{cases}$$

22. $f(x, y) = x - 3y - 2;$
$$\begin{cases} x + 2y + 6 \ge 0, \\ x - 3y - 6 \le 0, \\ y \le 0. \end{cases}$$

23. $f(x, y) = -2x + y - 3;$
$$\begin{cases} x - 3y + 9 \ge 0, \\ 4x + y + 8 \le 0, \\ y \ge 3x. \end{cases}$$

24. $f(x, y) = x + 2y + 3;$
$$\begin{cases} x + 4y - 4 \le 0, \\ x - y + 6 \ge 0, \\ y \ge 1. \end{cases}$$

25. $f(x, y) = x + 3y - 7;$
$$\begin{cases} 2x - y + 5 \ge 0, \\ 2x + 2y - 1 \le 0, \\ y + 9 \ge 0. \end{cases}$$

26. $f(x, y) = 3x + y - 2;$
$$\begin{cases} x - 2y + 4 \ge 0, \\ x + 2y + 4 \ge 0, \\ x \le 8. \end{cases}$$

27. $f(x, y) = x - 5y + 1;$
$$\begin{cases} 2x - y - 10 \le 0, \\ 2x + y + 5 \ge 0, \\ y \le 1. \end{cases}$$

28. $f(x, y) = 3x + 2y - 2;$
$$\begin{cases} x + 2y - 9 \le 0, \\ 4x - y - 4 \le 0, \\ x + 3 \ge 0. \end{cases}$$

29. $f(x, y) = 2x - 3y + 5;$
$$\begin{cases} x - y + 6 \ge 0, \\ 3x + y + 1 \le 0, \\ x \le 0. \end{cases}$$

30. $f(x, y) = x - 3y + 4;$
$$\begin{cases} x + y - 3 \le 0, \\ x - 4y - 1 \le 0, \\ x + 9 \ge 0. \end{cases}$$

IX. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ТЕОРИЯ ПОЛЯ

1. Вычислить повторный интеграл.

1. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{2x} xydy.$

2. $\int\limits_{-1}^1 dy \int\limits_{y^2-1}^{1-y^2} ydx.$

3. $\int\limits_2^4 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{y} \sqrt{y}dx.$

4. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{2}{x}}^{2x} x^5 ydy.$

5. $\int\limits_0^{\frac{3}{4}} dx \int\limits_{-2x}^{2x} xdy.$

6. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2y-3}^{2y} ydx.$

7. $\int\limits_{-2}^2 dy \int\limits_{y^2}^{1-y^2} \sqrt{y}dx.$

8. $\int\limits_{-2}^1 dx \int\limits_{-x}^{\frac{x}{2}+3} xydy.$

9. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x-1}^{x+1} \sqrt{x}ydy.$

10. $\int\limits_1^2 dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{0} yxdx.$

11. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{\frac{2}{x}} x^2 ydy.$

12. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{3x}^{x^2} xdy.$

13. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2x}^{x-1} x^2 dy.$

14. $\int\limits_1^3 dy \int\limits_{3y}^{y-2} xydx.$

15. $\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{2y}^{y^2} \sqrt{x}y dx.$

16. $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{2y-4}^{\frac{2}{y}} y dx.$

17. $\int\limits_{-4}^{4} dy \int\limits_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} xy^2 dx.$

18. $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y}} xy dx.$

19. $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{0}^{y^2} xy^3 dx.$

20. $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} xy dy.$

21. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{2x-1}^{\frac{x+6}{2}} x dy.$

22. $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{x^2+1}}^{\sqrt{x^2+1}} xy dy.$

23. $\int\limits_{-3}^{0} dx \int\limits_{x-2}^{4+3x} x dy.$

24. $\int\limits_{-3}^{1} dy \int\limits_{y-3}^{0} x^2y^2 dx.$

25. $\int\limits_{-1}^{4} dy \int\limits_{0}^{y-5} x\sqrt{y} dx.$

26. $\int\limits_{1}^{9} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} y dx.$

27. $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{2x}^{x+3} x^4 dy.$

28. $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} xy^3 dx.$

29. $\int\limits_{0}^{9} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} xy^2 dx.$

30. $\int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{-1}^{x^2} y dy.$

2. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми.

1. $y=2x$, $y=0{,}5x$, $x=1$.
2. $y=2/x$, $y=0{,}5x$, $x=4$.
3. $x=1-y^2$, $x=y$.
4. $y=2x+3$, $y=x^2$.
5. $y=x$, $x=0{,}5y$, $2\le y\le 4$.
6. $y=1-\sqrt{2x-x^2}$, $y=1+\sqrt{2x-x^2}$, $x=0$.
7. $y=2x$, $y=-2x$, $0\le x\le 0{,}75$.
8. $y=0{,}5x^2$, $y=x^2-1$.

9. $y=\sqrt{3-x},\ y=-\sqrt{3-x},\ x\geq 0{,}75.$

10. $x=0{,}2y^2+1,\ x=y^2,\ y\geq 0.$

11. $x=2y,\ x=2y-3,\ 0\leq x\leq 1.$

12. $y=0{,}5x,\ y=-x,\ x=8.$

13. $y=\sqrt{1-x},\ y=-\sqrt{1-x},\ x\geq -2.$

14. $x=2/y,\ y=2x-3,\ 1\leq x\leq 2.$

15. $y=4-2x,\ y=-2,\ x=1.$

16. $y=\sqrt{x},\ y=-x^2,\ x=1.$

17. $y=-0{,}5x^2,\ y=1-x^2.$

18. $y=3+x,\ y=2x,\ x=0.$

19. $x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3.$

20. $y=4,\ x=-\sqrt{y},\ x=-y^3.$

21. $x=y-2,\ x=-1,\ y=-3.$

22. $y=0{,}5(x+1),\ y=2x-1,\ x=0.$

23. $x=y-3,\ x=0,\ y=6.$

24. $y=0{,}5x+3,\ y=2x-1,\ x=1.$

25. $x=0{,}5(y+1),\ x=2y-1,\ y=0.$

26. $y=\sqrt{x}, y=x-2,\ y\geq 0.$

27. $y=x+1,\ x=2-y,\ y=-2.$

28. $x=2y-6,\ x=-y,\ y=-3.$

29. $y=x+3,\ y=0,\ x=4.$

30. $y=3x+4,\ y=x-2,\ x=-1.$

3. Вычислить повторный интеграл.

1. $\int\limits_0^1 zdz\int\limits_z^{2z} ydy\int\limits_0^y dx.$

2. $\int\limits_0^2 ydy\int\limits_y^{2y} dz\int\limits_0^z xdx.$

3. $\int\limits_{-1}^1 ydy\int\limits_{y-1}^{1-y} dx\int\limits_{-10}^x dz.$

4. $\int\limits_0^2 zdz\int\limits_{\frac{z}{2}}^z xdx\int\limits_{-1}^x dy.$

5. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{x^2} dz \int\limits_{-2}^{z} y dy.$

6. $\int\limits_0^1 x dx \int\limits_0^{x} y dy \int\limits_{-4}^{3y} dz.$

7. $\int\limits_1^2 z^2 dz \int\limits_0^{z} dy \int\limits_0^{2y} dx.$

8. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_y^{10} z dz \int\limits_0^{z} dx.$

9. $\int\limits_0^1 y dy \int\limits_{y-1}^{y} dx \int\limits_{-2}^{x} z dz.$

10. $\int\limits_1^3 dz \int\limits_z^{2z} x^2 dx \int\limits_0^{x} y dy.$

11. $\int\limits_0^4 x^2 dx \int\limits_0^{x} dz \int\limits_{-1}^{z} y dy.$

12. $\int\limits_1^2 x dx \int\limits_{x-1}^{x+1} y dy \int\limits_0^{y} dz.$

13. $\int\limits_0^2 z dz \int\limits_0^{z} dy \int\limits_{-4}^{y} x dx.$

14. $\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_x^{2x} y dy \int\limits_{-3}^{y} dz.$

15. $\int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_{-4}^{y} z^2 dz \int\limits_z^{0} dx$

16. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2y}^{y^2} dx \int\limits_0^{x} dz.$

17. $\int\limits_{-2}^0 dz \int\limits_{z-1}^{z} y dy \int\limits_y^{0} x dx.$

18. $\int\limits_0^2 x^2 dx \int\limits_1^{x} dz \int\limits_0^{z} y^2 dy.$

19. $\int\limits_{-2}^1 dx \int\limits_{x^2}^{x^4} y dy \int\limits_0^{y} z dz.$

20. $\int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_y^{y+1} z dz \int\limits_{-3}^{z} dx.$

21. $\int\limits_1^2 x^2 dx \int\limits_0^{x} dz \int\limits_{-1}^{2z} dy.$

22. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{y-1}^{1} dz \int\limits_{-2}^{z} x dx.$

23. $\int\limits_0^2 x dx \int\limits_{3x}^{x^2} dy \int\limits_0^{y} dz.$

24. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{x+2} z dz \int\limits_0^{z} y dy.$

25. $\int\limits_{-1}^1 dy \int\limits_y^{1} z dz \int\limits_{-3}^{z} dx.$

26. $\int\limits_2^3 x^2 dx \int\limits_x^{2x} y dy \int\limits_0^{y} dz.$

27. $\int\limits_{-1}^0 x dx \int\limits_0^{x} z^2 dz \int\limits_{-1}^{3z} dy.$

28. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{x} dz \int\limits_1^{z+3} y dy.$

29. $\int\limits_1^3 dz \int\limits_{\frac{z}{2}}^{z} y^2 dy \int\limits_1^{y+1} dx.$

30. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{x} z dz \int\limits_z^{z^2} dy.$

4. С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного поверхностями.

1. $x^2+y^2=5,\ z\le x^2+y^2+1,\ z\ge 0.$
2. $z=10-x^2-y^2,\ z\ge 6.$
3. $z=x^2+y^2,\ y\le x,\ z\le 4.$
4. $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4,\ x+y+z\le 4,\ z\ge 0.$
5. $x^2+y^2=9,\ x+y+z\le 5,\ z\ge 0.$
6. $2z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=\sqrt{9-x^2-y^2}.$
7. $2z=x^2+y^2,\ z=4,\ y\ge -x,\ y\le -x\sqrt{3}.$
8. $x^2+y^2=9-z,\ x^2+y^2\ge 4,\ z\ge 0.$
9. $x^2+y^2-z^2=0,\ x^2+y^2\le 4.$
10. $x^2+y^2=6,\ z\le x^2+y^2,\ z\ge 0.$
11. $x^2+y^2-(z+1)^2=0,\ z^2=x^2+y^2,\ x^2+y^2\le 4.$
12. $z=\sqrt{x^2+y^2+1},\ z=\sqrt{3-x^2-y^2}.$
13. $x^2+y^2=4,\ z\ge x^2+y^2,\ z\le 10.$
14. $z=x^2+y^2,\ z=2(x^2+y^2),\ x^2+y^2\le 1.$
15. $4-z=x^2+y^2,\ z\ge 0,\ x^2+y^2\le 1.$
16. $z=x^2+y^2,\ z=4,\ y\ge x,\ y\le x\sqrt{3}.$
17. $z=4-x^2-y^2,\ 0\le z\le 3.$
18. $x^2+y^2=9,\ x^2+y^2=4,\ z\le 5-x,\ z\ge 0.$
19. $z=x^2+y^2,\ 1\le z\le 4.$
20. $z=6-x^2-y^2,\ z\ge 2.$
21. $2z=x^2+y^2,\ x^2+y^2\le 2,\ z\ge 0.$
22. $z=5-x^2-y^2,\ z\ge 0,\ x^2+y^2\le 1.$
23. $z=x^2+y^2,\ z\le 4.$
24. $x^2+y^2-z^2=0,\ 2z=x^2+y^2.$
25. $3z=x^2+y^2,\ 3\le z\le 27.$
26. $z=x^2+y^2+1,\ x^2+y^2=4,\ z\ge 0.$
27. $z=-\sqrt{x^2+y^2},\ z=-\sqrt{9-x^2-y^2}.$
28. $2z=x^2+y^2,\ z\le 18,\ x\ge 0.$
29. $x^2+y^2=9,\ x^2+y^2=z^2,\ 2\ge z\ge 0.$
30. $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=25,\ x+y+z\le 10,\ z\ge 0.$

5. Найти поток векторного поля $\vec{a}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ через замкнутую поверхность с помощью формулы Остроградского.

1. $1\le z\le 2-x^2-y^2,\ \vec{a}=(2y+x)\vec{i}+(3x+2y)\vec{j}+3z\vec{k}.$

2. $x^2+y^2\le 1,\ 0\le z\le\sqrt{x^2+y^2},\ \vec{a}=x\vec{i}+(3y+z)\vec{j}+5(y-z)\vec{k}.$

3. $0\le z\le 3,\ x^2+y^2\le 1,\ 0\le y\le 1,\ \vec{a}=3y\vec{i}+(4x+y)\vec{j}+3z\vec{k}.$

4. $x^2+y^2=18,\ 0\le z\le y,$
$0\le x\le y\sqrt{3},\ \vec{a}=(y+3x)\vec{i}+2xz\vec{j}+5(x-z)\vec{k}.$

5. $z=x+y,\ x+y=1,\ z=0,\ x=0,\ y=0,$
$\vec{a}=2x\vec{i}+(2y+z)\vec{j}+5(y+z)\vec{k}.$

6. $x\ge y^2,\ 0\le z\le 1-x,\ \vec{a}=(2x+y)\vec{i}+(-3y+3z)\vec{j}+2z\vec{k}.$

7. $0\le y\le 1-x,\ x\ge 0,\ 0\le z\le 1-x,\ \vec{a}=3x\vec{i}-(y+z)\vec{j}+(2y-3z)\vec{k}.$

8. $x^2+y^2=z,\ x=1,\ y=0,\ y=2x,\ z=0,$
$\vec{a}=-\left(4x+y^2\right)\vec{i}+\left(3x^2+z\right)\vec{j}+\left(y^2-5z\right)\vec{k}.$

9. $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1,\ x\ge 0,\ \vec{a}=2y^2\vec{i}+\left(3+3z^2\right)\vec{j}+5\left(x+z\right)\vec{k}.$

10. $1\le x^2+y^2\le 4,\ 0\le z\le 5-x,$
$\vec{a}=\left(x+y^3\right)\vec{i}-\left(5x+2y\right)\vec{j}-\left(x^2-4z\right)\vec{k}.$

11. $0\le z\le\sqrt{x^2+y^2},\ \vec{a}=y^2i+\left(x^2+z\right)\vec{j}+5\left(2y+z\right)\vec{k}.$

12. $x^2\le y\le 1,\ 0\le z\le 1,\ \vec{a}=6z\vec{i}+\left(2y+z\right)\vec{j}+\left(y^2-3z\right)\vec{k}.$

13. $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 4,\ \vec{a}=\left(5x+2y\right)\vec{i}+\left(x-7y\right)\vec{j}+\left(4z-x^2\right)\vec{k}.$

14. $1\le x^2+y^2\le 9,\ 0\le z\le 4-x-y,$
$\vec{a}=\left(3x+y\right)\vec{i}+\left(z^2+3y\right)\vec{j}+\left(x^2-7z\right)\vec{k}.$

15. $0\le z\le x^2+y^2,\ x=1,\ y=2x,\ y=0,$
$\vec{a}=\left(4+y\right)\vec{i}+\left(x^2+2y\right)\vec{j}+\left(x+z\right)\vec{k}.$

16. $0\le z\le 1-x^2-y^2,\ \vec{a}=\left(2x+z\right)\vec{i}+\left(2-4y\right)\vec{j}+\left(x^3+z\right)\vec{k}.$

17. $0{,}5\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2,\ \vec{a}=\left(z+2y\right)\vec{i}-\left(3x^2-2y\right)\vec{j}+\left(x-z\right)\vec{k}.$

18. $10x+5y+4z-20=0,\ z=0,\ x=0,\ y=0,$
$\vec{a}=(4x+z)\vec{i}+(z-2y)\vec{j}+(x-4z)\vec{k}.$

19. $0\le x^2+y^2\le 9,\ -1\le z\le 4,$
$\vec{a}=(x+2y)\vec{i}-(z-3y)\vec{j}+(5y^2-z)\vec{k}.$

20. $0\le z\le \sqrt{xy},\ y=0,\ y=9x,\ x=1,$
$a=(1+2x)\vec{i}-(4x-y)\vec{j}-(2y+4z)\vec{k}.$

21. $x^2\le y\le 1,\ x\ge 0,\ 0\le z\le 1-x,$
$\vec{a}=(3x-1)\vec{i}-(4z+2y)\vec{j}+(1+3z)\vec{k}.$

22. $0\le y\le 4x,\ x=1,\ 0\le z\le xy,$
$\vec{a}=\left(2+y^3\right)\vec{i}-\left(2z^2+x\right)\vec{j}+\left(2y-3z\right)\vec{k}.$

23. $4x+3y-6z=12,\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ 0\le z,$
$\vec{a}=(2+3y)\vec{i}-(5y+x)\vec{j}+(2x-3z)\vec{k}.$

24. $1-x\le y\le 1,\ x\le 1,\ 0\le z\le 1-y,$
$\vec{a}=\left(y+z^3\right)\vec{i}-(2x-3y)\vec{j}+(1-4z)\vec{k}.$

25. $0\le x^2+y^2\le 4,\ 0\le z\le (xy)^2,$
$\vec{a}=(x+y)\vec{i}+(5x+3y)\vec{j}+(y-z)\vec{k}.$

26. $0\le y\le 1-x^2,\ 0\le z\le y,\ \vec{a}=\left(2x+y^2\right)\vec{i}+\left(x^2+y\right)\vec{j}+\left(x^2-4z\right)\vec{k}.$

27. $0\le y\le 1,\ x\ge 0,\ 5\ 0\le z\le 1-x,$
$\vec{a}=(x+y)\vec{i}-(4x+4y)\vec{j}+(3y+2z)\vec{k}.$

28. $5x-20y+8z-40=0,\ x=0,\ y=0,\ z=0,$
$\vec{a}=\left(2+y^3\right)\vec{i}+(5+2z)\vec{j}+\left(y^2+4z\right)\vec{k}.$

29. $0\le z\le (2xy)^2,\ y=0,\ y=2x,\ x=-2,$
$\vec{a}=(z+y)i+(x-2y)\vec{j}-(y-z)\vec{k}.$

30. $-(x^2+y^2)\le z\le 0,\ y=3x,\ y=4,\ x=0,$
$\vec{a}=(5x+1)\vec{i}-6(x+y)\vec{j}+(5+2z)\vec{k}.$

6. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}=P(x,\ y)\vec{i}+$ $+Q(x,\ y)\vec{j}$ вдоль замкнутого контура L, лежащего в плоскости xOy (обход против часовой стрелки).

1. $\vec{a}=(x-1)\vec{i}+2y\vec{j}$. L: параллелограмм с вершинами в точках $A(0,\ 0)$, $B(2,\ 0)$, $C(3,\ 1)$, $D(1,\ 1)$.

2. $\vec{a}=(y+3)\vec{i}+x\vec{j}$. L: треугольник с вершинами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$.

3. $\vec{a}=2(x-1)\vec{i}+y\vec{j}$. L: дуга BC окружности $x^2+y^2=1$ и отрезки прямых CA и AB. $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

4. $\vec{a}=2x\vec{i}+(y-1)\vec{j}$. L: параллелограмм с вершинами в точках $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(4,3)$, $D(2,3)$.

5. $\vec{a}=y\vec{i}+(x-2)\vec{j}$. L: треугольник с вершинами в точках $A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$.

6. $\vec{a}=x\vec{i}+2(y+1)\vec{j}$. L: прямоугольник с вершинами в точках $A(0,0)$, $B(5,0)$, $C(5,2)$, $D(0,2)$.

7. $\vec{a}=x\vec{i}-(y-3)\vec{j}$. L: параллелограмм с вершинами в точках $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(2,2)$, $D(-2,2)$.

8. $\vec{a}=2x\vec{i}+(y+1)\vec{j}$. L: дуга BC окружности $x^2+y^2=1$ и отрезки прямых CA и AB. $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

9. $\vec{a}=3x\vec{i}-(y+2)\vec{j}$. L: параллелограмм с вершинами в точках $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(0,3)$, $D(-2,3)$.

10. $\vec{a}=(x+3)\vec{i}-2y\vec{j}$. L: треугольник с вершинами в точках $A(0,1)$, $B(1,1)$, $C(1,3)$.

11. $\vec{a}=(x-2)\vec{i}+3y\vec{j}$. L: прямоугольник с вершинами в точках $A(3,1)$, $B(-3\ 1)$, $C(-3,-1)$, $D(3,-1)$.

12. $\vec{a}=3x\vec{i}+(y+3)\vec{j}$. L: параллелограмм с вершинами в точках $A(0,0)$, $B(1,3)$, $C(-3,3)$, $D(-4,0)$.

13. $\vec{a}=(x+5)\vec{i}+2\vec{j}$. L: треугольник с вершинами в точках $A(0,1)$, $B(4,0)$, $C(2,2)$.

14. $\vec{a}=(x-2)\vec{i}-4\vec{j}$. L: дуга BC окружности $x^2+y^2=1$ и отрезки прямых CA и AB. $A(0,0)$, $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $C(0,1)$.

15. $\vec{a}=2\vec{i}-(y+1)\vec{j}$. L: параллелограмм с вершинами в точках $A(2, 0)$, $B(0, 2)$, $C(-5, 2)$, $D(-3, 0)$.

16. $\vec{a}=\vec{i}+2(y-2)\vec{j}$. L: треугольник с вершинами в точках $A(0, 0)$, $B(3, 2)$, $C(0, 2)$.

17. $\vec{a}=2x\vec{i}-5y\vec{j}$. L: прямоугольник с вершинами в точках $A(3, 2)$, $B(-1, 2)$, $C(-1, 0)$, $D(3, 0)$.

18. $\vec{a}=3\vec{i}+4y\vec{j}$. L: параллелограмм с вершинами в точках $A(0, 0)$, $B(1, 1)$, $C(1, 4)$, $D(0, 3)$

19. $\vec{a}=2x\vec{i}+\vec{j}$. L: треугольник с вершинами в точках $A(0, 0)$, $B(3, 2)$, $C(-1, 2)$.

20. $\vec{a}=2\vec{i}-(y+1)\vec{j}$. L: дуга BC окружности $x^2+y^2=1$ и отрезки прямых CA и AB. $A(0, 0)$, $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $C(1, 0)$.

21. $\vec{a}=(x+1)\vec{i}-5\vec{j}$. L: параллелограмм с вершинами в точках $A(0, 0)$, $B(-2, -2)$, $C(1, -2)$, $D(3, 0)$.

22. $\vec{a}=3\vec{i}+3y^2\vec{j}$. L: треугольник с вершинами в точках $A(0, 0)$, $B(4, 2)$, $C(0, 3)$.

23. $\vec{a}=x^2\vec{i}+2y\vec{j}$. L: прямоугольник с вершинами в точках $A(0, 0)$, $B(0, 4)$, $C(-2, 4)$, $D(-2, 0)$.

24. $\vec{a}=(x+4)\vec{i}-y\vec{j}$. L: параллелограмм с вершинами в точках $A(0, 0)$, $B(-1, -3)$, $C(1, -3)$, $D(2, 0)$.

25. $\vec{a}=4x\vec{i}-2(y-1)\vec{j}$. L: треугольник с вершинами в точках $A(0, 0)$, $B(1, 3)$, $C(-2, 3)$.

26. $\vec{a}=\vec{i}-5(y+2)\vec{j}$. L: дуга BC окружности $x^2+y^2=1$ и отрезки прямых CA и AB. $A(0, 0)$, $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

27. $\vec{a}=3x^2\vec{i}+3y\vec{j}$. L: параллелограмм с вершинами в точках $A(0, 0)$, $B(2, -2)$, $C(0, -2)$, $D(-2, 0)$.

28. $\vec{a} = 2x\vec{i} - (y-5)\vec{j}$. L: треугольник с вершинами в точках $A(0, 3)$, $B(-3, 0)$, $C(0, -2)$.

29. $\vec{a} = 3(x-1)\vec{i} + y^2\vec{j}$. L: прямоугольник с вершинами в точках $A(0, 0)$, $B(0, -2)$, $C(4, -2)$, $D(4, 0)$.

30. $\vec{a} = x^2\vec{i} - (y+3)\vec{j}$. L: параллелограмм с вершинами в точках $A(4, 2)$, $B(1, 2)$, $C(-1, -2)$, $D(2, -2)$.

X. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

1. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.

1. $x - yy' = 1.$
2. $(1+y^2)dx = xdy.$
3. $(1+y)dx - (1-x)dy = 0.$
4. $\sqrt{1+y^2}\,dx = xydy.$
5. $xy + \sqrt{1-x^2}\,y' = 0.$
6. $y' \cdot \ln y = y.$
7. $(1+y^2)xdx + (1+x^2)dy = 0.$
8. $y\sin x dx + \cos x \ln y dy = 0.$
9. $x(y^2+1) + (x^2y - y)y' = 0.$
10. $x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0.$
11. $x + yy' = 0.$
12. $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0.$
13. $(x^2-1)dy - 2xydx = 0.$
14. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0.$
15. $(1+y^2)dx - xydy = 0.$
16. $y\ln y dx + xdy = 0.$
17. $\mathrm{tg}\,x \cdot \sin^2 y + \cos x \cdot \mathrm{tg}\,y \cdot y' = 0.$
18. $y' = 2^{x+y}.$
19. $x(y+1)dx - (x^2+1)ydy = 0.$
20. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+y^2}{(1+x^2)xy}.$
21. $e^{y-2x}dy = 4xdx.$
22. $(1+y^2)dx - xy(1+x^2)dy = 0.$
23. $y'\sin x - y\cos x = 0.$
24. $(y+xy)dx + (x-xy)dy = 0.$

25. $y'\cos^2 x = \dfrac{y}{\ln y}$.

26. $(1+y^2)dx + 2xydy = 0$.

27. $\left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)y' - y = 0$.

28. $2^{x+y} + 2^{3x-y}\cdot y' = 0$.

29. $(1+x)^3 dy - (y-2)^2 dx = 0$.

30. $ydx + \sin^2 x dy = 0$.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка, представив неизвестную функцию в виде произведения $y = u\cdot v$.

1. $xy' + 2y = x^2$.

2. $y' - \dfrac{y}{x+4} = (x+4)^3$.

3. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.

4. $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^{0,5}$.

5. $y' + y\mathrm{tg}x = \sec x$.

6. $(x^2-1)y' + (x+1)y = x-1$.

7. $y' + 2xy = 2x^3$.

8. $y' - \dfrac{1-2x}{x^2}y = e^{-1/x}$.

9. $y' + y = e^{-x}\cos x$.

10. $y' + 2y = (x+1)y^{-2}$.

11. $y' + \dfrac{y}{x} = x^2y^2$.

12. $e^x y' + e^x y = x$.

13. $y' - y\mathrm{ctg}x = \sin x$.

14. $2xy' - y = 3x^2$.

15. $y' - \dfrac{y}{x+2} = x^2 + 4x + 5$.

16. $(4+x^2)y' + xy = 16$.

17. $(x+1)y' - xy = 3$.

18. $y' + y\cos x = \sin x \cos x$.

19. $(1+x^2)y' + xy = 1$.

20. $(x^4+x)\cdot y' + (2x^3-1)y = \dfrac{x^3-2}{x}$.

21. $y' - 2xy = -2x$.

22. $y' - y\mathrm{tg}x \sec x = e^{\sec x}$.

23. $xy' - \dfrac{y}{x+1} = x$.

24. $xy' + y - e^x = 0$.

25. $y' - y = 2e^x y^3$.

26. $(x^2-x)y' - (x+1)y + 4 = 0$.

27. $xy' + y = x^2 + 3x + 2$.

28. $(x^2-x)y' + y = 2x^3 - x^2$.

29. $y' + x^2y = x^2$.

30. $y' - \dfrac{2y}{x+1} = e^x(1+x)^2$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения высшего порядка.

1. $y^{IV}=\sin x$.
2. $y''=\dfrac{10}{x}+1$.
3. $y'''=e^x(x+5)$.
4. $y'''=\dfrac{1}{x}+5$.
5. $y'''=2xe^x$.
6. $y'''=40x^4$.
7. $y'''=xe^{2x}$.
8. $y^{IV}=20x^3$.
9. $y^{IV}=xe^{3x}$.
10. $y'''=60x^2$.
11. $y^{IV}=16e^{-4x}$.
12. $y''=x\sin 2x$.
13. $y^{IV}=e^{2x}$.
14. $y''=x\cos 5x$.
15. $y'''=x^2e^x$.
16. $y''=-9x\cdot\sin 3x$.
17. $y'''=x3^x$.
18. $y^{IV}=\cos^2 x-\sin^2 x$.
19. $y''=x\cos 3x$.
20. $y^{IV}=\cos 5x$.
21. $y''=\dfrac{2}{x}+x$.
22. $y^{IV}=\cos 3x+x$.
23. $y^{IV}=40x^3+x-4$.
24. $y'''=\sin x+8e^{2x}$.
25. $y'''=12x^3-\sin x$.
26. $y''=\cos x+\dfrac{1}{x}$.
27. $y'''=6x^2+2x-4$.
28. $y'''=x^2\sin x$.
29. $y^{IV}=49\sin 7x+1$.
30. $y''=x\cos x+x$.

4. Решить задачу Коши для уравнения второго порядка.

1. $y''=32y^3$, $y(0)=1$, $y'(0)=4$.
2. $y''y^3+49=0$, $y(3)=-7$, $y'(3)=-1$.
3. $y''+\dfrac{1}{x}y'=x$, $y(1)=0$, $y'(1)=1$.
4. $y''+50\sin y\cdot\cos 3y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=5$.
5. $y''y^3+36=0$, $y(0)=3$, $y'(0)=2$.
6. $y''-\dfrac{1}{x}y'=-1$, $y(-1)=1$, $y'(-1)=1$.
7. $y''=72y^3$, $y(-2)=1$, $y'(-2)=6$.
8. $y''=2\sin^3 y\cos y$, $y(1)=\dfrac{\pi}{2}$, $y'(1)=1$.

9. $y'' + \frac{1}{x}y' = 0,\ y(1) = 0,\ y'(1) = 1.$

10. $y'' = 32y^3$, $y(4) = 1$, $y'(4) = 4$.

11. $y''y^3 + 16 = 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 2$.

12. $y''y = y'^2$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$.

13. $xy'' = (1 + x^2)y'$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$.

14. $y''y^3 + 9 = 0$, $y(-1) = 1$, $y'(-1) = 3$.

15. $y'' + y' = x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

16. $y'' - \frac{1}{x}y' = 0,\ y(-1) = 0,\ y'(-1) = 1.$

17. $y''y^3 + 4 = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = -2$.

18. $2y'' - \frac{1}{x}y' = 0,\ y(1) = 0,\ y'(1) = 1.$

19. $y'' = 2y^3$, $y(-1) = 1$, $y'(-1) = 1$.

20. $y''y^3 + 1 = 0$, $y(-2) = -1$, $y'(-2) = 1$.

21. $y'' = y'^2$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -1$.

22. $xy'' = (x + 1)y'$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$.

23. $y''y^3 + 64 = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 2$.

24. $y''(x - 3) + y' = 0$, $y(4) = 0$, $y'(4) = 1$.

25. $y'' - 2\sin^3 y \cos y = 0$, $y(1) = \pi/2$, $y'(1) = -1$.

26. $y''y^3 + 25 = 0$, $y(2) = -5$, $y'(2) = -1$.

27. $y'' + 2yy'^3 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

28. $y'' + 8\sin y \cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

29. $y''y'^3 = y^4$, $y(0) = \sqrt{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$.

30. $2y''y = 1 + y'^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

5. Найти общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения и указать вид частного решения с неопределенными коэффициентами.

1. $y^{V} + 9y''' = 2x^2 + x - x^2e^{3x}$.

2. $y^{IV} + 8y'' + 16y = x^3e^{2x} + \sin 2x$.

3. $y^{IV} + 5y''' + 6y'' = x^2e^{-2x} - x^3$.

4. $y^{VI} + 2y^{IV} + y'' = x - 1 + x\cos x$.

5. $y^{VI} - 4y'' = 10 + x^4 + x\sin(4x)$.

6. $y^{IV}-y'''+y'-y=(x+1)e^{x}+x^{3}-2.$

7. $y^{VI}-16y'''+64y=xe^{2x}+xe^{-x}\sin\left(x\sqrt{3}\right).$

8. $y^{V}-9y'''=x^{2}+2x+(x+1)\cos 3x.$

9. $y^{IV}+8y''+16y=xe^{2x}+(x^{2}+x)\cos 2x.$

10. $y^{IV}-5y'''+6y''=xe^{-2x}+2x^{2}\cos 2x.$

11. $y^{VI}-2y^{IV}+y''=x^{2}-x+4\cos x.$

12. $y^{IV}+4y''=x^{3}e^{2x}+x\sin\left(\sqrt{2}x\right)+1.$

13. $y^{IV}+y'''+y'+y=(x^{2}+4)e^{-x}+x+7.$

14. $y^{VI}+16y'''+64y=x^{2}e^{-2x}+3e^{-x}\cos\left(x\sqrt{3}\right).$

15. $y^{V}-25y'''=x^{3}-9x+(x-8)\cos 5x.$

16. $y^{IV}-8y''+16y=e^{2x}\sin 2x+(2x+1)\cos 2x.$

17. $y^{IV}+y'''-6y''=(x-2)e^{2x}+(x+9)\cos 2x.$

18. $y^{VI}-4y^{IV}+4y''=(x^{2}-x)e^{2x}+4\cos 2x.$

19. $y^{VI}-4y''=x^{4}+x^{2}e^{\sqrt{2}x}+x\cos\left(\sqrt{2}x\right).$

20. $y^{IV}-2y'''+y'-2y=(x^{2}+x)e^{2x}+1.$

21. $y^{VI}-2y'''+y=xe^{7x}+xe^{x}+\sin x.$

22. $y^{VI}+9y^{IV}=5x^{2}+4x-xe^{3x}+\cos 3x.$

23. $y^{V}+25y'''=x+3+(x-1)\cos 5x.$

24. $y^{IV}-y'''-6y''=xe^{-2x}+e^{3x}+2+x\cos 2x.$

25. $y^{IV}+16y''=x+2+xe^{-4x}+4x\cos 4x.$

26. $y^{VI}+125y'''=x^{3}e^{-5x}-9x+(x-8)\cos 5x.$

27. $y^{IV}-6y'''=xe^{2x}-x^{3}+2x+xe^{-x}\sin(6x).$

28. $y^{IV}+3y'''+y'+3y=(x^{3}+4)e^{-3x}+x+10.$

29. $y^{IV}+5y'''=x^{3}e^{-5x}-5x+e^{x}\sin(5x).$

30. $y^{IV}-18y''+81y=x^{2}e^{3x}+\sin 9x+x.$

6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом подбора.

1. $2y''-5y'=\sin\dfrac{5x}{2}.$

2. $9y''-6y'+y=9e^{\frac{x}{3}}.$

3. $3y''-5y'-2y=x^{2}.$

4. $y''-3y'+\dfrac{5}{2}y=e^{\frac{3x}{2}}\sin 2x.$

5. $y''-10y'+25y=4e^{5x}$.

6. $6y''-y'-y=3x$.

7. $y''+6y'+25y=e^{-3x}\cos 2x$.

8. $y''-12y'+36y=\sin 6x$.

9. $y''-2y'-8y=6e^{-2x}$.

10. $y''-8y'+25y=9e^{4x}\sin x$.

11. $y''-4y'+4y=16x^2$.

12. $y''+3y'-4y=e^{-4x}$.

13. $5y''-6y'+5y=e^{3x}\cos 4x$.

14. $y''-4y'+4y=4x^2-2x$.

15. $y''-4y'+3y=3\sin x$.

16. $y''-2y'+2y=4\sin x$.

17. $2y''+5y'-3y=\sin 3x$.

18. $5y''-2y'+y=e^{x}\cos 2x$.

19. $y''+4y=2\sin 2x-3\cos 3x$.

20. $y''+14y'+13y=4e^{-3x}$.

21. $5y''-2y'+y=e^{x}\sin 2x$.

22. $y''-8y'+16y=4\sin 4x$.

23. $6y''-y'-y=\cos\frac{x}{2}$.

24. $9y''-6y'+y=\sin x$.

25. $y''-2y'+10y=e^{x}\sin x$.

26. $9y''-6y'+y=4\cos\frac{x}{3}$.

27. $2y''-y'-y=\sin 2x$.

28. $y''+8y+16y=\cos x$.

29. $y''+9y=2\sin 3x$.

30. $y''-3y'-4y=2e^{4x}$.

7. Найти решение задачи Коши.

1. $2y''-5y'-3y=e^{3x},\ y(0)=0,\ y'(0)=\frac{8}{7}$.

2. $4y''+4y'+y=2e^{\frac{-x}{2}},\ y(0)=1,\ y'(0)=1$.

3. $2y''-y'-y=e^{x},\ y(0)=3,\ y'(0)=\frac{1}{3}$.

4. $y''+y'=e^{x}+x,\ y(0)=\frac{1}{2},\ y'(0)=\frac{1}{2}$.

5. $y''-12y'+36y=36x+2e^{6x},\ y(0)=-\frac{2}{3},\ y'(0)=0$.

6. $y''-10y'+25y=5\sin 5x,\ y(0)=3,\ y'(0)=\frac{1}{3}$.

7. $2y''-y'-y=x^2-e^{\frac{-2x}{3}},\ y(0)=-\frac{4}{5},\ y'(0)=0$.

8. $y''-8y'+16y=16\cos 4x-1,\ y(0)=-\frac{1}{16},\ y'(0)=0$.

9. $y''-4y'+4y=8x-4\cos 2x,\ y(0)=1,\ y'(0)=-1$.

10. $y''-12y'+36y=18x^3+1,\ y(0)=\frac{1}{12},\ y'(0)=-\frac{3}{4}.$

11. $4y''+4y'+y=x^3+6x^2,\ y(0)=2,\ y'(0)=0.$

12. $4y''-4y'+2y=5e^{\frac{x}{2}}-4x,\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$

13. $y''-2y'+5y=-5x^3-4x^2+2x,\ y(0)=-\frac{1}{5},\ y'(0)=-3.$

14. $2y''+5y'-3y=e^{\frac{x}{2}}+6x,\ y(0)=-\frac{1}{3},\ y'(0)=\frac{1}{7}.$

15. $6y''-y'-y=e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{2}},\ y(0)=1,\ y'(0)=\frac{1}{5}.$

16. $4y''+4y'+y=2x^2-4,\ y(0)=4,\ y'(0)=0.$

17. $y''-5y'+6y=26\sin 2x+1,\ y(0)=-\frac{1}{3},\ y'(0)=-1.$

18. $9y''+12y'+4y=\cos\frac{2x}{3}-8,\ y(0)=-2,\ y'(0)=1.$

19. $y''-8y'+16y=4e^{4x},\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$

20. $y''+2y'+5y=5x^2-x,\ y(0)=1,\ y'(0)=0.$

21. $y''-5y'+6y=3e^{3x}+1,\ y(0)=\frac{1}{6},\ y'(0)=0.$

22. $4y''+4y'+y=8e^{\frac{-x}{2}}+x,\ y(0)=0,\ y'(0)=1.$

23. $y''+2y'+5y=4e^{-x}+\sin 2x,\ y(0)=\frac{13}{17},\ y'(0)=\frac{2}{17}.$

24. $y''+4y'+4y=2e^{\frac{-x}{2}}+x,\ y(0)=\frac{3}{4},\ y'(0)=\frac{1}{4}.$

25. $y''-2y'+y=4e^{x}+x^2-4x,\ y(0)=2,\ y'(0)=-2.$

26. $y''+12y'+36y=2e^{-6x}-108x,\ y(0)=0,\ y'(0)=0.$

27. $y''-6y'+13y=25\sin 2x,\ y(0)=\frac{1}{3},\ y'(0)=1.$

28. $y''+6y'+9y=2e^{-3x}-9x,\ y(0)=\frac{2}{3},\ y'(0)=0.$

29. $y''+3y'-4y=e^{4x}+e^{-4x},\ y(0)=\frac{1}{24},\ y'(0)=-\frac{31}{30}.$

30. $y''-4y=4e^{2x}+4\cos 2x,\ y(0)=\frac{1}{2},\ y'(0)=1.$

8. Решить уравнения, нарисовать интегральные кривые и определить устойчивость нулевого решения $y=0$. Здесь A, B, C — порядковые номера, которые имеют Ваши инициалы (буквы) в русском алфавите, N — номер варианта.

1) $y'+(N-A-B-11)y=0$;

2) $y'+(N-B-C)y=0$;

3) $y'+(N+A+B+C)y=0$.

9. Найти точку покоя системы

$$\begin{cases} \dot{x}=Nx+(C-N)y+(A-B), \\ \dot{y}=(A-N)x+(B-N)y+(A-C); \end{cases}$$

определить ее тип, нарисовать фазовый портрет в окрестности этой точки. Здесь A, B, C — порядковые номера, которые имеют Ваши инициалы (буквы) в русском алфавите, N — номер варианта.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**	**Е**	**Ё**	**Ж**	**З**	**И**	**Й**	**К**	**Л**	**М**	**Н**	**О**	**П**
18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	
Р	**С**	**Т**	**У**	**Ф**	**Х**	**Ц**	**Ч**	**Ш**	**Щ**	**Ъ**	**Ы**	**Ь**	**Э**	**Ю**	**Я**	

Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление

Пусть A, B, C — порядковые номера, которые имеют Ваши инициалы (буквы) в русском алфавите, N — номер варианта.

1. Решить уравнения $z^2+A+N=0$ и $z(B-iC)+Ai+N=0$. Сделать проверку. Изобразить все три корня на комплексной плоскости, найти наибольший по модулю корень. Записать уравнение окружности, проходящей через этот корень. Записать уравнение прямой, проходящей через два оставшихся корня.

2. Найти все нули и все особые точки функции, определить их порядок и тип. Изобразить на плоскости.

№ варианта	Функция
1, 6, 11, 16, 21, 26	$\left(z^2-Az+iB\right)\cos\dfrac{1}{Az+B+C}$

Продолжение табл.

№ варианта	Функция
2, 7, 12, 17, 22, 27	$\dfrac{\exp(z+Ai)-B}{\sin^2(z+C)}$
3, 8, 13, 18, 23, 28	$\dfrac{\operatorname{ch}(Az-Bi)-1}{z^3+C}$
4, 9, 14, 19, 24, 29	$\left((z-iC)^2-1\right)\dfrac{1}{Az^3+Bzi}$
5, 10, 15, 20, 25, 30	$\dfrac{\exp(Biz)+C}{z^4+Ai}$

3. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)dz$ по каждому из контуров.

Изобразить контуры и особые точки функции

$$f(z)=\frac{Niz^2+(A-B)z-Ci}{1+N^2z^2},$$

где

а) L — ломаная, соединяющая последовательно точки $z_1=0$, $z_2=A+iB$, $z_3=N-iC$;

б) L: $|z|=|A+iN|$;

в) L: $|z-B+iC|=\left|\dfrac{1}{N}+\dfrac{i}{A}\right|$.

4. Решить задачу Коши для каждого дифференциального уравнения. Сделать проверку.

а) $(C+B)y'+Ny=A$, $y(0)=A-N$;

б) $(A+N)y''+(C-B)y'+Ny=(A-B)e^t+N(t-At^2)+B(C-At)$, $y(0)=A-B$, $y'(0)=C-N$.

5. Решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений. Сделать проверку.

$$\begin{cases} x'=x+Ny-At, \\ y'=Bx+(B-C)y+1. \end{cases}$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**	**Е**	**Ё**	**Ж**	**З**	**И**	**Й**	**К**	**Л**	**М**	**Н**	**О**	**П**
18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	
Р	**С**	**Т**	**У**	**Ф**	**Х**	**Ц**	**Ч**	**Ш**	**Щ**	**Ъ**	**Ы**	**Ь**	**Э**	**Ю**	**Я**	

XI. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. В комплекте букв магнитной азбуки гласные буквы красного цвета, согласные — синего, а остальные зеленого. Из этих букв выложили Ваши имя, отчество и фамилию, а неиспользованные буквы отложили в сторону. Набор использованных букв сложили в коробку, буквы тщательно перемешали. Найти вероятность каждого из указанных событий.

а) Две, взятые наугад из коробки буквы будут: синего цвета; одного цвета; разного цвета;

б) среди пяти взятых наугад букв будут: две синие и три красные; три синие и две красные; две синие, две красные и одна зеленая;

в) из взятых наугад в указанном количестве букв можно выложить: слово «да» или слово «не», или слово «но» (2 буквы); Ваши инициалы (3 буквы); Ваше имя (нужное количество букв).

2. Электрическая схема состоит из блоков, а каждый блок состоит из элементов (возможно, одинаковых), надежность которых задана в таблице. Изобразить схему. Рассчитать надежность схемы до перестановки элементов и после их перестановки. Узнать, в каком из случаев надежность выше.

№ элемента	Э1	Э2	Э3	Э4	Э5	Э6	Э7	Э8	Э9	Э10
Надежность	0,50	0,95	0,80	0,60	0,70	0,55	0,90	0,75	0,60	0,85

№ варианта	Блок Б1	Блок Б2	Блок Б3	Расположение блоков	Поменять местами
1	Параллельно: Э6, Э7	Параллельно: Э1, Э5, Э5, Э10	Последовательно: Э1, Э2	Б1 и Б3 последовательно, а параллельно им Б2	Э2 и Э6
2	Параллельно: Э5, Э9, Э2	Параллельно: Э1, Э5, Э5	Параллельно: Э2, Э3	Все блоки параллельно	Э1 и Э9
3	Параллельно: Э6, Э9	Последовательно: Э8, Э8	Последовательно: Э1, Э2, Э3, Э10	Б3 и Б2 параллельно, а затем последовательно Б1	Э6 и Э10
4	Параллельно: Э7, Э9	Последовательно: Э1, Э5, Э5, Э7	Последовательно: Э1, Э2, Э3	Б1 и Б2 параллельно, а затем последовательно Б3	Э2 и Э9
5	Параллельно: Э4, Э4	Последовательно: Э1, Э5, Э3	Последовательно: Э10, Э2, Э8	Все блоки параллельно	Э2 и Э8
6	Последовательно: Э4, Э9, Э2	Параллельно: Э5, Э5	Последовательно: Э8, Э2, Э3	Все блоки последовательно	Э3 и Э4
7	Последовательно: Э6, Э8	Параллельно: Э1, Э5, Э5	Параллельно: Э1, Э2, Э6	Все блоки параллельно	Э2 и Э8
8	Параллельно: Э6, Э9	Последовательно: Э1, Э5, Э5, Э7	Последовательно: Э1, Э2, Э3	Все блоки параллельно	Э2 и Э6
9	Параллельно: Э6, Э9, Э2, Э2	Параллельно: Э1, Э5	Параллельно: Э2, Э3	Все блоки последовательно	Э2 и Э6
10	Параллельно: Э9, Э3, Э3	Параллельно: Э1, Э5, Э5	Последовательно: Э2, Э3	Все блоки последовательно	Э2 и Э6
11	Параллельно: Э6, Э8, Э8	Параллельно: Э1, Э5	Параллельно: Э8, Э2, Э3	Б1 и Б2 последовательно, а параллельно им Б3	Э3 и Э5
12	Последовательно: Э4, Э9, Э4	Параллельно: Э1, Э5, Э5	Последовательно: Э10, Э10	Все блоки последовательно	Э1 и Э9
13	Параллельно: Э10, Э9	Последовательно: Э1, Э5	Параллельно: Э6, Э2, Э3, Э4	Б1 и Б3 последовательно, а параллельно им Б2	Э2 и Э10
14	Параллельно: Э7, Э7	Параллельно: Э1, Э5, Э10, Э2	Последовательно: Э4, Э2	Все блоки последовательно	Э4 и Э10

15	Последовательно: Э6, Э9, Э7	Параллельно: Э1, Э3, Э2	Параллельно: Э2, Э3	Б2 и Б3 параллельно, а затем последовательно Б1	Э1 и Э6
16	Последовательно: Э6, Э9	Параллельно: Э1, Э2, Э5	Последовательно: Э1, Э2, Э3	Б1 и Б2 параллельно, а затем последовательно Б3	Э3 и Э5
17	Параллельно: Э7, Э8	Параллельно: Э1, Э5, Э5	Параллельно: Э4, Э2, Э3	Все блоки параллельно	Э4 и Э8
18	Параллельно: Э10, Э10	Последовательно: Э4, Э4, Э5, Э7	Параллельно: Э2, Э3	Б1 и Б3 параллельно, а затем последовательно Б2	Э2 и Э5
19	Параллельно: Э6, Э9	Последовательно: Э1, Э5, Э5	Параллельно: Э1, Э2, Э3	Все блоки последовательно	Э3 и Э9
20	Последовательно: Э6, Э9, Э4	Параллельно: Э1, Э5, Э4	Последовательно: Э2, Э3	Все блоки параллельно	Э2 и Э6
21	Последовательно: Э2, Э9	Параллельно: Э1, Э5, Э5	Параллельно: Э6, Э2, Э3	Б2 и Б3 параллельно, а затем последовательно Б1	Э1 и Э9
22	Параллельно: Э6, Э9	Параллельно: Э1, Э5, Э5	Последовательно: Э1, Э2, Э3	Б1 и Б2 последовательно, а параллельно им Б3	Э2 и Э9
23	Последовательно: Э1, Э9	Параллельно: Э8, Э5, Э5, Э3	Параллельно: Э1, Э2, Э3, Э4	Б1 и Б2 параллельно, а затем последовательно Б3	Э2 и Э8
24	Параллельно: Э6, Э2	Параллельно: Э1, Э5, Э5	Параллельно: Э1, Э2, Э3	Все блоки последовательно	Э2 и Э6
25	Параллельно: Э6, Э9	Последовательно: Э5, Э8	Параллельно: Э1, Э2, Э3, Э10	Все блоки последовательно	Э1 и Э5
26	Параллельно: Э6, Э9	Последовательно: Э7, Э7	Последовательно: Э1, Э2, Э3, Э6	Все блоки параллельно	Э3 и Э9
27	Последовательно: Э6, Э9, Э3	Параллельно: Э1, Э5, Э10	Последовательно: Э1, Э3	Б1 и Б3 последовательно, а параллельно им Б2	Э9 и Э10
28	Параллельно: Э6, Э9	Последовательно: Э1, Э5, Э4	Параллельно: Э1, Э2, Э3	Все блоки последовательно	Э1 и Э4
29	Параллельно: Э10, Э4, Э8	Последовательно: Э4, Э5, Э5	Параллельно: Э2, Э10	Все блоки параллельно	Э2 и Э8
30	Параллельно: Э9, Э7	Последовательно: Э1, Э5, Э2, Э3	Параллельно: Э1, Э2	Б1 и Б2 параллельно, а затем последовательно Б3	Э5 и Э9

3. Четыре однотипных станка С1, С2, С4 и С4, работающих с разной производительностью (отношение объемов выпуска указано в таблице), штампуют одинаковые изделия, которые в случайном порядке попадают в один контейнер. Теоретический (априорный) процент выпуска нестандартных изделий указан в таблице. После выпуска каждой из первых двух партий изделий одно изделие бралось на проверку и по результатам проверки (стандартная или нестандартная) уточнялся процент выпуска нестандартных изделий для каждого станка. По результатам двух проверок найти для каждого станка уточненный (апостериорный) процент выпуска нестандартных изделий. Сравнить с исходными данными.

№ варианта	Отношение объемов выпуска С1:С2:С3:С4	Теоретический процент (%) выпуска нестандартных деталей				Из 1 партии	Из 2 партии
		С1	С2	С3	С4		
1	1:1,25:1,05:1,30	10	2	5	7	Нестанд.	Станд.
2	1,05:1:1,35:1,15	7	3	5	10	Станд.	Станд.
3	1,20:1,15:1:1,45	7	10	4	8	Станд.	Нестанд.
4	1:1,25:1,05:1,15	8	4	1	12	Станд.	Станд.
5	1,20:1,25:1:1,45	5	4	8	1	Станд.	Станд.
6	1:1,20:1,05:1,40	4	7	8	2	Станд.	Станд.
7	1,20:1,10:1,05:1	2	1	9	3	Станд.	Нестанд.
8	1,20:1,25:1,05:1	6	12	2	2	Нестанд.	Станд.
9	1:1,35:1,05:1,10	5	8	1	3	Станд.	Нестанд.
10	1:1,25:1,05:1,30	4	1	10	5	Нестанд.	Нестанд.
11	1,20:1:1,05:1,50	12	4	3	8	Нестанд.	Станд.
12	1,20:1,10:1:1,45	7	9	3	5	Нестанд.	Станд.
13	1,50:1,25:1:1,30	7	10	2	5	Станд.	Нестанд.
14	1,10:1:1,05:1,45	12	8	1	3	Станд.	Станд.
15	1,20:1,25:1:1,50	5	9	2	3	Станд.	Станд.
16	1:1,50:1,05:1,35	5	12	4	1	Нестанд.	Нестанд.
17	1:1,25:1,05:1,45	3	2	6	8	Станд.	Нестанд.
18	1,30:1,10:1:1,45	6	2	6	5	Нестанд.	Станд.
19	1,20:1,35:1:1,45	7	5	5	1	Нестанд.	Станд.
20	1,35:1,50:1,05:1	7	12	2	3	Нестанд.	Станд.
21	1,10:1,30:1,05:1	1	4	10	3	Нестанд.	Нестанд.
22	1:1,25:1,05:1,45	10	5	7	3	Станд.	Нестанд.

Продолжение табл.

№ варианта	Отношение объемов выпуска С1:С2:С3:С4	Теоретический процент (%) выпуска нестандартных деталей				Из 1 партии	Из 2 партии
		С1	С2	С3	С4		
23	1,20:1,25:1:1,50	7	5	7	5	Станд.	Станд.
24	1,20:1:1,05:1,35	3	2	7	12	Станд.	Станд.
25	1,35:1:1,10:1,45	2	4	4	10	Станд.	Нестанд.
26	1,20:1:1,05:1,45	12	7	3	6	Нестанд.	Нестанд.
27	1:1,25:1,05:1,10	8	8	2	5	Станд.	Нестанд.
28	1:1,50:1,05:1,35	1	10	10	5	Станд.	Станд.
29	1,20:1,25:1:1,45	7	12	1	5	Нестанд.	Станд.
30	1,20:1,50:1,05:1	7	3	4	10	Нестанд.	Станд.

4. Схема независимых испытаний Бернулли реализуется при значениях параметров n (общее число испытаний), p (вероятность успеха в одном испытании) и k (число успехов в n испытаниях).

Вычислить вероятность получить k успехов в n испытаниях тремя способами:

а) по точной формуле $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$;

б) используя теорему Пуассона $P_n(k) \approx \dfrac{(np)^{-k}}{k!} e^{-np}$;

в) используя приближение Муавра — Лапласа $P_n(k) \approx P(k) = \dfrac{\varphi(x)}{\sqrt{np(1-p)}}$, где $x = \dfrac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ и $\varphi(x)$ — дифференциальная функция Лапласа — Гаусса, заданная таблицей.

Сравнить результаты всех вычислений.

Вычисления проводить, оставляя два знака после запятой. Использовать таблицы из приложения.

Показ. \ № варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	35	56	47	58	52	37	36	50	54	36
p	0,60	0,81	0,72	0,83	0,77	0,51	0,61	0,75	0,79	0,50
k	20	15	15	30	28	12	17	22	21	14

Продолжение табл.

№ варианта / Показ.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n	48	41	44	37	43	38	46	39	51	57
p	0,73	0,55	0,69	0,62	0,68	0,52	0,71	0,64	0,76	0,82
k	21	25	10	25	12	22	29	10	27	24
№ варианта / Показ.	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
n	45	53	38	42	39	41	40	49	55	40
p	0,70	0,78	0,63	0,67	0,53	0,66	0,54	0,74	0,80	0,65
k	12	24	15	23	25	10	14	13	11	26

5. В результате серии наблюдений непрерывной случайной величины X была найдена непрерывная функция, задающая плотность распределения случайной величины Y, чье распределение похоже на распределение величины X. Найденная функция равна нулю вне отрезка $\left[-\frac{n+2}{2}, \frac{m+4}{2}\right]$, где n — номер варианта, а m — порядковый номер буквы, с которой начинается Ваша фамилия в русском алфавите. На указанном отрезке графиком этой функции является ломаная, соединяющая последовательно точки $A_1\left(-\frac{n+2}{2}, 0\right)$, $A_2\,(0, c)$, $A_3\,(2, nc)$ и $A_1\left(\frac{m+4}{2}, 0\right)$.

а) Найти значение параметра c;

б) найти функцию распределения случайной величины Y и построить ее график;

в) найти вероятность попадания случайной величины Y в интервал $(-5; 5)$;

г) вычислить математическое ожидание случайной величины Y, отметить положение математического ожидания на графике плотности распределения;

д) вычислить дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины Y, проверить выполнение правила трех сигм, сделать вывод о возможности нормального распределения наблюдаемой случайной величины X.

6. По результатам серии случайных измерений составлена таблица, в которой для каждой случайной пары координат $(x_n,\ y_m)$ указано количество точек, имеющих эти координаты. Выбрав из таблицы соответствующие номеру варианта столбцы и строки, составить матрицу измерений и провести ее исследование:

1) взяв за основу статистическое определение вероятности, найти закон распределения двумерной случайной величины (X, Y) (оставляя два знака после запятой);

2) найти законы распределения случайных величин X и Y и функции распределения вероятностей F_X и F_Y;

3) построить графики функций распределения и гистограммы для случайных величин X и Y;

4) для каждой из случайных величин X и Y найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение. Указать эти величины на гистограммах;

5) проверить правило трех сигм, сделать вывод о возможности распределения случайных величин X и Y по нормальному закону;

6) исследовать зависимость случайных величин X и Y;

7) вычислить ковариацию и коэффициент корреляции X и Y. Сделать вывод о коррелированности этих случайных величин.

№ варианта	1	2	3	4	5
№ строк	1–4	8–14	10–18	14–20	10–12
№ столбцов	15–21	11–14	4–6	9–12	12–20
№ варианта	6	7	8	9	10
№ строк	16–18	5–8	5–11	1–9	4–6
№ столбцов	1–9	14–20	18–21	16–18	2–10
№ варианта	11	12	13	14	15
№ строк	9–12	13–21	11–19	12–18	1–7
№ столбцов	10–16	19–21	1–3	13–16	17–20
№ варианта	16	17	18	19	20
№ строк	19–21	13–16	1–7	17–20	3–11
№ столбцов	2–10	8–14	1–4	5–11	13–15

Продолжение табл.

№ варианта	21	22	23	24	25
№ строк	15–21	13–21	11–14	1–3	3–11
№ столбцов	5–8	10–12	10–16	1–9	7–9
№ варианта	26	27	28	29	30
№ строк	13–15	18–21	7–9	1–6	6–11
№ столбцов	12–20	1–7	10–18	1–5	6–12

Таблица результатов измерений

Y \ *X*	Столбец																				
Строка	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**
1	3	0	5	1	7	2	6	0	0	6	1	3	2	4	1	4	6	1	0	6	2
2	4	2	6	8	2	8	1	9	3	2	2	6	2	7	1	5	0	0	6	0	6
3	8	7	9	0	7	9	1	2	3	1	9	0	9	2	1	6	1	3	1	3	3
4	4	4	8	5	5	5	3	9	9	3	3	5	4	6	3	1	6	6	1	6	6
5	0	7	2	7	1	9	9	9	2	0	8	2	1	7	3	7	1	3	5	9	1
6	5	8	8	4	4	1	4	4	5	8	3	3	4	2	7	7	8	8	5	0	9
7	6	1	5	9	5	9	1	1	9	1	8	8	2	9	3	0	3	0	8	1	1
8	4	9	0	7	1	1	2	1	5	5	4	3	8	5	9	7	1	6	6	1	5
9	4	8	7	1	4	7	1	2	9	2	0	1	2	1	2	2	4	2	6	2	5
10	1	8	4	7	1	0	5	9	1	5	3	8	3	5	5	5	2	2	8	4	8
11	7	1	4	7	5	7	3	9	3	9	8	1	3	9	6	1	1	6	7	9	0
12	7	1	8	1	2	3	7	5	1	0	5	5	6	1	9	0	6	7	0	9	3
13	4	8	5	7	1	3	1	7	4	7	3	7	6	9	3	9	9	1	2	4	9
14	7	3	1	3	1	1	1	4	6	2	6	2	5	0	9	2	4	7	2	2	6
15	2	4	7	7	4	8	8	5	1	4	4	4	7	6	4	5	8	5	5	8	9
16	2	8	0	2	0	8	4	0	5	7	7	7	2	2	9	3	2	7	0	4	0
17	0	3	0	9	1	0	0	0	2	5	1	0	8	8	0	8	5	5	8	9	8
18	9	3	1	8	9	7	3	8	3	0	4	7	4	4	9	8	2	3	7	0	0
19	6	8	6	6	6	2	9	0	6	0	0	5	5	4	6	0	9	5	4	0	8
20	8	1	1	8	6	8	6	9	6	0	3	6	0	6	4	4	2	4	0	0	3
21	2	6	2	0	1	2	0	3	7	3	6	0	1	1	6	0	7	5	7	5	3

7. На плоскости нарисована парабола, заданная уравнением $y^2 = \frac{m}{n}\left(x - \frac{2}{n+m+1}\right)$, где n — номер варианта, а m — порядковый номер буквы в русском алфавите, с которой начинается Ваша фамилия. Часть плоскости, находящаяся между ветвями параболы, окрашена в зеленый цвет.

а) Изобразить окрашенную фигуру, попавшую в квадрат $[0, 1]\times[0, 1]$;

б) используя 20 точек, произвольным образом выбранных из таблицы случайных точек (см. приложения), вычислить приближенно площадь окрашенной фигуры, расположенной в указанном квадрате;

в) повторить вычисление, взяв произвольным образом другие 20 точек;

г) усреднить результаты вычислений;

д) вычислить указанную площадь с помощью определенного интеграла. Сравнить результаты всех вычислений.

XII. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

1. По указанию преподавателя провести статистическую обработку текста объемом в 10–20 строк. Наблюдаемым значением считать номер буквы в русском алфавите, пробел считать нулем.

Для полученной выборки:

а) вычислить объем выборки, размах выборки, построить сгруппированный статистический ряд;

б) найти точечные оценки параметров распределения: выборочное среднее, медиану, моду, исправленную дисперсию, исправленное среднеквадратическое отклонение;

в) найти эмпирическую функцию распределения;

г) построить график эмпирической функции распределения и полигон частот.

2. Провести следующий опыт. На листе бумаги (А4) с положительными декартовыми осями отметить точки с координатами: (N, N), $(M_i, 0)$ и $(0, K_i)$, где N — номер варианта, M_i — порядковые номера букв в русском алфавите, из которых составлено Ваше полное имя, а K_i — порядковые номера букв в русском алфавите, из которых составлена Ваша фамилия. Через указанные точки провести прямые, параллельные осям координат и вычислить площади всех получившихся прямоугольников. На размеченном указанным образом листе разместить плотно в один слой мелкие однотипные предметы (фасоль, горох, макаронные изделия и т. п.). Выписать все пары чисел

(x_i, y_i), где x_i — площадь прямоугольника, y_i — количество предметов, лежащих строго внутри этого прямоугольника. В каждом прямоугольнике вычислить среднюю площадь проекции предмета $X_i = \dfrac{x_i}{n_i}$. Провести исследование непрерывной случайной величины X по данным полученной выборки $X_1, \ldots, X_m$.

а) Найти распределение (интервальный ряд);

б) построить гистограммы частот и относительных частот;

в) вычислить выборочное среднее $\bar{x}$, медиану, моду и исправленное среднее квадратическое отклонение s.

3. Сгенерировать двумерную случайную величину следующим образом. В любом поисковике в Интернете ввести в строку поиска набор из 10–15 слов, содержащий Ваши имя, отчество и номер варианта (прописью). Убирая по одному слову с конца, записывать число найденных страниц (в тысячах).

Для полученной выборки провести регрессионный анализ:

а) построить диаграмму рассеяния, откладывая на оси Ox число слов, а на оси Oy соответствующее число страниц;

б) исключив выпадающие точки так, чтобы для координат оставшихся точек (не менее 5) допускалась линейная зависимость, составить таблицу значений x_i (количество слов) и y_i (соответствующее число найденных страниц);

в) допуская, что x_i и y_i связаны линейной зависимостью $y = kx + b$, методом наименьших квадратов найти точечные оценки коэффициентов k и b, составить оцененное уравнение регрессии;

г) используя оцененное уравнение регрессии, получить расчетное значение y для $x = 5{,}5$;

д) найти оценку s^2 остаточной дисперсии относительно линии регрессии;

е) найти оценки s_k^2 и s_b^2 остаточных дисперсий коэффициентов.

4. Для нормально распределенной случайной величины X найти доверительные интервалы для оценки неизвестного математического ожидания a и дисперсии σ^2. Наблюдаемые значения величины выбирать из таблицы по правилу: взять все числа, содержащиеся в объединении строк с номерами от N до $N+5$, и столбцов с номерами $\left[\frac{A}{2}\right]$, $\left[\frac{B}{2}\right]$, $\left[\frac{C}{2}\right]$. Здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x, N — номер варианта, A, B и C — порядковые номера в алфавите букв, являющихся Вашими инициалами.

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
1	48	39	43	44	34	34	32	43	40	46	39	34	40	48	43	34	34
2	25	31	34	49	39	37	45	48	41	49	31	39	41	25	48	39	37
3	43	46	34	35	42	32	41	34	42	42	46	42	42	43	34	42	32
4	38	40	46	47	34	42	38	40	38	36	40	34	38	38	40	34	42
5	30	43	41	40	40	35	35	41	38	45	43	40	38	30	41	40	35
6	37	42	38	36	44	39	32	48	43	39	42	44	43	37	48	44	39
7	43	30	32	36	42	34	49	48	49	50	30	42	49	43	48	42	34
8	37	30	44	48	44	35	45	34	33	41	30	44	33	37	34	44	35
9	43	45	50	34	33	39	41	39	46	31	45	33	46	43	39	33	39
10	40	52	44	39	35	45	33	42	42	36	52	35	42	40	42	35	45
11	44	51	45	39	34	44	40	37	43	32	51	34	43	44	37	34	44
12	33	42	40	35	37	43	48	48	50	32	42	37	50	33	48	37	43
13	40	48	45	43	36	39	42	40	37	30	48	36	37	40	40	36	39
14	44	50	46	39	41	48	44	42	35	51	50	41	35	44	42	41	48
15	44	50	47	37	33	34	42	43	43	47	50	33	43	44	43	33	34
16	33	48	38	42	45	32	34	44	39	45	48	45	39	33	44	45	32
17	48	26	31	34	38	36	46	49	40	48	26	38	40	48	49	38	36
18	42	47	35	34	41	33	41	35	43	42	47	41	43	42	35	41	33
19	37	39	47	47	33	42	37	39	40	37	39	33	40	37	39	33	42
20	43	41	30	39	38	36	34	42	37	46	41	38	37	43	42	38	36
21	39	44	37	35	43	38	33	47	45	38	44	43	45	39	47	43	38
22	37	48	38	52	40	45	44	42	38	40	48	40	38	37	42	40	45
23	44	46	37	34	41	37	41	39	30	38	46	41	30	44	39	41	37
24	32	41	48	36	51	36	33	39	45	40	41	51	45	32	39	51	36
25	34	41	38	34	33	27	51	45	27	38	41	33	27	34	45	33	27
26	42	37	46	41	47	36	30	45	41	40	37	47	41	42	45	47	36
27	37	37	39	42	48	41	36	39	33	47	37	48	33	37	39	48	41

Продолжение табл.

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
28	43	49	27	31	41	46	40	36	36	42	49	41	36	43	36	41	46
29	41	46	33	37	47	35	31	29	30	36	46	47	30	41	29	47	35
30	42	47	35	34	41	33	41	35	43	42	47	41	43	42	35	41	33
31	48	39	43	44	34	34	32	43	40	46	39	34	40	48	43	34	34
32	25	31	34	49	39	37	45	48	41	49	31	39	41	25	48	39	37
33	43	46	34	35	42	32	41	34	42	42	46	42	42	43	34	42	32
34	38	40	46	47	34	42	38	40	38	36	40	34	38	38	40	34	42
35	30	43	41	40	40	35	35	41	38	45	43	40	38	30	41	40	35

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**	**Е**	**Ё**	**Ж**	**З**	**И**	**Й**	**К**	**Л**	**М**	**Н**	**О**	**П**
18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	
Р	**С**	**Т**	**У**	**Ф**	**Х**	**Ц**	**Ч**	**Ш**	**Щ**	**Ъ**	**Ы**	**Ь**	**Э**	**Ю**	**Я**	

XIII. УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

1. Найти функцию $u(x)$. Сделать проверку.

1. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 4xy^2 - 5x^4 y$.

2. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 3x^3 y^2 + 2y^6$.

3. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 6x^2 y^3 + 2x^2 y - 3$.

4. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = x^3 + 3y^2 - 5xy$.

5. $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 y - x\cos y$.

6. $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y - 4$.

7. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 4x + 3$.

8. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 3y + 6x^2$.

9. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 5x + 3y - 2$.

10. $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 5x$.

11. $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \operatorname{tg} x + x\sin y$.

12. $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2xy + 4x^2 y^3 + 3$.

13. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\cos y \sin x + \cos x \operatorname{tg} y$.

14. $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x - 4x^3 y^2 - 3y + 2$.

15. $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2x + 5x^2 y + 3$.

16. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 5y$.

17. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 3x - 5xy$.

18. $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 5e^x \sin y + \cos x e^y$.

19. $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x - 4x^3 y^2 - 3y + 2$.

20. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 3x^3 y^2 + x - 5$.

21. $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2x^3 y^3 - x^2 y + 5x$.

22. $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 7x^6 y^3 + 6x^2 y^5$.

23. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=4x^3y-2xy^2+3y.$ 24. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x+8x^3y^4-6y^2.$

25. $\dfrac{\partial u}{\partial y}=3x-6xy+y.$ 26. $\dfrac{\partial u}{\partial y}=4x^3y+5xy^3.$

27. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2\cos y-2y^4\sin x.$ 28. $\dfrac{\partial u}{\partial y}=2x+5xy^3.$

29. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2y-2xy^4.$ 30. $\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^6e^{2y}-e^{xy}.$

2. Найти общее решение уравнения. Сделать проверку.

1. $u_{xx}+5u_{xy}+4u_{yy}=0.$ 2. $u_{xx}-5u_{xy}+4u_{yy}=0.$
3. $u_{xx}-7u_{xy}+12u_{yy}=0.$ 4. $u_{xx}-4u_{xy}-21u_{yy}=0.$
5. $u_{xx}+4u_{xy}-45u_{yy}=0.$ 6. $u_{xx}-8u_{xy}+15u_{yy}=0.$
7. $u_{xx}+7u_{xy}-18u_{yy}=0.$ 8. $u_{xx}-7u_{xy}-8u_{yy}=0.$
9. $u_{xx}+4u_{xy}-21u_{yy}=0.$ 10. $u_{xx}+2u_{xy}+3u_{yy}=0.$
11. $2u_{xx}+5u_{xy}+3u_{yy}=0.$ 12. $4u_{xx}-5u_{xy}+u_{yy}=0.$
13. $u_{xx}+7u_{xy}+12u_{yy}=0.$ 14. $5u_{xx}-4u_{xy}-9u_{yy}=0.$
15. $u_{xx}-4u_{xy}-45u_{yy}=0.$ 16. $3u_{xx}-8u_{xy}-16u_{yy}=0.$
17. $2u_{xx}+7u_{xy}-4u_{yy}=0.$ 18. $u_{xx}-7u_{xy}+6u_{yy}=0.$
19. $u_{xx}-10u_{xy}+21u_{yy}=0.$ 20. $u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}=0.$
21. $2u_{xx}+5u_{xy}-3u_{yy}=0.$ 22. $8u_{xx}-10u_{xy}-3u_{yy}=0.$
23. $3u_{xx}+7u_{xy}+2u_{yy}=0.$ 24. $5u_{xx}-14u_{xy}+9u_{yy}=0.$
25. $7u_{xx}-2u_{xy}-5u_{yy}=0.$ 26. $16u_{xx}-8u_{xy}-3u_{yy}=0.$
27. $4u_{xx}+7u_{xy}-2u_{yy}=0.$ 28. $6u_{xx}-7u_{xy}+u_{yy}=0.$
29. $21u_{xx}-10u_{xy}+u_{yy}=0.$ 30. $3u_{xx}+2u_{xy}-u_{yy}=0.$

3. Найти решение задачи Коши. Сделать проверку.

1. $u_{tt}=4u_{xx};$
   $u|_{t=0}=3x^2,\ u_t|_{t=0}=2x.$
2. $u_{tt}=3u_{xx};$
   $u|_{t=0}=3x^2+4x,\ u_t|_{t=0}=-x+1.$
3. $u_{tt}=5u_{xx};$
   $u|_{t=0}=5-3x^2,\ u_t|_{t=0}=6x-2.$

4. $u_{tt}=9u_{xx}$;
$u|_{t=0}=5x^2-3x+1,\ u_t|_{t=0}=4x+7.$

5. $u_{tt}=11u_{xx}$;
$u|_{t=0}=4x^2+3x-2,\ u_t|_{t=0}=3x+25.$

6. $u_{tt}=6u_{xx}$;
$u|_{t=0}=2-4x^2+5x,\ u_t|_{t=0}=7x+12.$

7. $u_{tt}=5u_{xx}$;
$u|_{t=0}=2+3x+4x^2+6x^3,\ u_t|_{t=0}=0.$

8. $u_{tt}=u_{xx}$;
$u|_{t=0}=0,\ u_t|_{t=0}=2-4x+x^2.$

9. $u_{tt}=16u_{xx}$;
$u|_{t=0}=5x^2+6x-9,\ u_t|_{t=0}=28-8x.$

10. $u_{tt}=7u_{xx}$;
$u|_{t=0}=7-4x-8x^2,\ u_t|_{t=0}=5x+10.$

11. $u_{tt}=5u_{xx}$;
$u|_{t=0}=2x^2-3x,\ u_t|_{t=0}=5x.$

12. $u_{tt}=4u_{xx}$;
$u|_{t=0}=5x^2+8x-3,\ u_t|_{t=0}=2x+7.$

13. $u_{tt}=3u_{xx}$;
$u|_{t=0}=9x-6x^2,\ u_t|_{t=0}=7x+5.$

14. $u_{tt}=5u_{xx}$;
$u|_{t=0}=8x^2+6x+6,\ u_t|_{t=0}=2x+5.$

15. $u_{tt}=10u_{xx}$;
$u|_{t=0}=7x^2+x-4,\ u_t|_{t=0}=5x-25.$

16. $u_{tt}=4u_{xx}$;
$u|_{t=0}=2x-3x^2+5,\ u_t|_{t=0}=3x+2.$

17. $u_{tt}=9u_{xx}$;
$u|_{t=0}=2x+4x^2+x^3,\ u_t|_{t=0}=0.$

18. $u_{tt}=4u_{xx}$;
$u|_{t=0}=0,\ u_t|_{t=0}=3+5x+4x^2.$

19. $u_{tt}=u_{xx}$;
$u|_{t=0}=x^2-6x,\ u_t|_{t=0}=5-4x.$

20. $u_{tt}=5u_{xx}$;
$u|_{t=0}=7+2x+3x^2,\ u_t|_{t=0}=4x-1.$

21. $u_{tt}=u_{xx}$;
$u|_{t=0}=4x^2+3x-5,\ u_t|_{t=0}=6x-2.$

22. $u_{tt}=5u_{xx}$;
$u|_{t=0}=x^2+3x,\ u_t|_{t=0}=-4x+6.$

23. $u_{tt}=2u_{xx}$;
$u|_{t=0}=2-5x^2,\ u_t|_{t=0}=x+4.$

24. $u_{tt}=7u_{xx}$;
$u|_{t=0}=x^2+5x+7,\ u_t|_{t=0}=-x+4.$

25. $u_{tt}=12u_{xx}$;
$u|_{t=0}=-x^2+2x-7,\ u_t|_{t=0}=3x-2.$

26. $u_{tt}=3u_{xx}$;
$u|_{t=0}=3x-2x^2+5,\ u_t|_{t=0}=5x+8.$

27. $u_{tt}=4u_{xx}$;
$u|_{t=0}=3-4x+2x^2+x^3,\ u_t|_{t=0}=0.$

28. $u_{tt}=2u_{xx}$;
$u|_{t=0}=0,\ u_t|_{t=0}=3-5x+3x^2.$

29. $u_{tt}=8u_{xx}$;
$u|_{t=0}=4x^2-3x+5,\ u_t|_{t=0}=4-2x.$

30. $u_{tt}=3u_{xx}$;
$u|_{t=0}=8x^2-4x+3,\ u_t|_{t=0}=x-4.$

4. Решить первую смешанную задачу на отрезке.

1. $u_{tt}=4u_{xx},\ x\in(0,2),\ t\in(0,\infty)$;
$u|_{t=0}=x(2-x),\ u_t|_{t=0}=0,\ u|_{x=0}=u|_{x=2}=0.$

2. $u_{tt}=9u_{xx},\ x\in(0,4),\ t\in(0,\infty)$;
$u|_{t=0}=x(4-x),\ u_t|_{t=0}=0,\ u|_{x=0}=u|_{x=4}=0.$

3. $u_{tt}=16u_{xx},\ x\in(0,5),\ t\in(0,\infty)$;
$u|_{t=0}=x(5-x),\ u_t|_{t=0}=0,\ u|_{x=0}=u|_{x=5}=0.$

4. $u_{tt}=9u_{xx},\ x\in(0,3),\ t\in(0,\infty)$;
$u|_{t=0}=x(3-x),\ u_t|_{t=0}=0,\ u|_{x=0}=u|_{x=3}=0.$

5. $u_{tt}=u_{xx},\ x\in(0,5),\ t\in(0,\infty)$;
$u|_{t=0}=4x(5-x),\ u_t|_{t=0}=0,\ u|_{x=0}=u|_{x=5}=0.$

6. $u_{tt}=16u_{xx},\ x\in(0,3),\ t\in(0,\infty)$;
$u|_{t=0}=3x(3-x),\ u_t|_{t=0}=0,\ u|_{x=0}=u|_{x=3}=0.$

7. $u_{tt}=36u_{xx},\ x\in(0,\ 4),\ t\in(0,\ \infty);$
$u|_{t=0}=6x(4-x),\ u_t|_{t=0}=0,\ u|_{x=0}=u|_{x=4}=0.$

8. $u_{tt}=9u_{xx},\ x\in(0,\ 7),\ t\in(0,\ \infty);$
$u|_{t=0}=x(7-x),\ u_t|_{t=0}=0,\ u|_{x=0}=u|_{x=7}=0.$

9. $u_{tt}=u_{xx},\ x\in(0,\ 1),\ t\in(0,\ \infty);$
$u|_{t=0}=5x(1-x),\ u_t|_{t=0}=0,\ u|_{x=0}=u|_{x=1}=0.$

10. $u_{tt}=64u_{xx},\ x\in(0,\ 8),\ t\in(0,\ \infty);$
$u|_{t=0}=x(8-x),\ u_t|_{t=0}=0,\ u|_{x=0}=u|_{x=8}=0.$

11. $u_{tt}=16u_{xx},\ x\in(0,\ 4),\ t\in(0,\ \infty);$
$u|_{t=0}=7x(4-x),\ u_t|_{t=0}=0,\ u|_{x=0}=u|_{x=4}=0.$

12. $u_{tt}=25u_{xx},\ x\in(0,\ 5),\ t\in(0,\ \infty);$
$u|_{t=0}=2x(5-x),\ u_t|_{t=0}=0,\ u|_{x=0}=u|_{x=5}=0.$

13. $u_{tt}=36u_{xx},\ x\in(0,\ 6),\ t\in(0,\ \infty);$
$u|_{t=0}=3x(6-x),\ u_t|_{t=0}=0,\ u|_{x=0}=u|_{x=6}=0.$

14. $u_{tt}=49u_{xx},\ x\in(0,\ 5),\ t\in(0,\ \infty);$
$u|_{t=0}=8x(5-x),\ u_t|_{t=0}=0,\ u|_{x=0}=u|_{x=5}=0.$

15. $u_{tt}=4u_{xx},\ x\in(0,\ 4),\ t\in(0,\ \infty);$
$u|_{t=0}=9x(4-x),\ u_t|_{t=0}=0,\ u|_{x=0}=u|_{x=4}=0.$

16. $u_{tt}=16u_{xx},\ x\in(0,\ 6),\ t\in(0,\ \infty);$
$u|_{t=0}=2x(6-x),\ u_t|_{t=0}=0,\ u|_{x=0}=u|_{x=6}=0.$

17. $u_{tt}=25u_{xx},\ x\in(0,\ 3),\ t\in(0,\ \infty);$
$u|_{t=0}=4x(3-x),\ u_t|_{t=0}=0,\ u|_{x=0}=u|_{x=3}=0.$

18. $u_{tt}=9u_{xx},\ x\in(0,\ 2),\ t\in(0,\ \infty);$
$u|_{t=0}=3x(2-x),\ u_t|_{t=0}=0,\ u|_{x=0}=u|_{x=2}=0.$

19. $u_{tt}=36u_{xx},\ x\in(0,\ 4),\ t\in(0,\ \infty);$
$u|_{t=0}=5x(4-x),\ u_t|_{t=0}=0,\ u|_{x=0}=u|_{x=4}=0.$

20. $u_{tt}=49u_{xx},\ x\in(0,\ 1),\ t\in(0,\ \infty);$
$u|_{t=0}=8x(1-x),\ u_t|_{t=0}=0,\ u|_{x=0}=u|_{x=1}=0.$

21. $u_{tt}=25u_{xx},\ x\in(0,\ 2),\ t\in(0,\ \infty);$
$u|_{t=0}=4x(2-x),\ u_t|_{t=0}=0,\ u|_{x=0}=u|_{x=2}=0.$

22. $u_{tt}=49u_{xx},\ x\in(0,\ 3),\ t\in(0,\ \infty);$
$u|_{t=0}=7x(3-x),\ u_t|_{t=0}=0,\ u|_{x=0}=u|_{x=3}=0.$

23. $u_{tt}=9u_{xx},\ x\in(0,\ 5),\ t\in(0,\ \infty);$
$u|_{t=0}=3x(5-x),\ u_t|_{t=0}=0,\ u|_{x=0}=u|_{x=5}=0.$

24. $u_{tt}=4u_{xx},\ x\in(0,\ 7),\ t\in(0,\ \infty);$
$u|_{t=0}=2x(7-x),\ u_t|_{t=0}=0,\ u|_{x=0}=u|_{x=7}=0.$

25. $u_{tt}=81u_{xx},\ x\in(0,\ 2),\ t\in(0,\ \infty);$
$u|_{t=0}=6x(2-x),\ u_t|_{t=0}=0,\ u|_{x=0}=u|_{x=2}=0.$

26. $u_{tt}=25u_{xx},\ x\in(0,\ 6),\ t\in(0,\ \infty);$
$u|_{t=0}=x(6-x),\ u_t|_{t=0}=0,\ u|_{x=0}=u|_{x=6}=0.$

27. $u_{tt}=36u_{xx},\ x\in(0,\ 2),\ t\in(0,\ \infty);$
$u|_{t=0}=x(2-x),\ u_t|_{t=0}=0,\ u|_{x=0}=u|_{x=2}=0.$

28. $u_{tt}=9u_{xx},\ x\in(0,\ 1),\ t\in(0,\ \infty);$
$u|_{t=0}=10x(1-x),\ u_t|_{t=0}=0,\ u|_{x=0}=u|_{x=1}=0.$

29. $u_{tt}=64u_{xx},\ x\in(0,\ 8),\ t\in(0,\ \infty);$
$u|_{t=0}=22x(8-x),\ u_t|_{t=0}=0,\ u|_{x=0}=u|_{x=8}=0.$

30. $u_{tt}=49u_{xx},\ x\in(0,\ 3),\ t\in(0,\ \infty);$
$u|_{t=0}=30x(3-x),\ u_t|_{t=0}=0,\ u|_{x=0}=u|_{x=3}=0.$

5. Решить первую смешанную задачу на отрезке. Сделать проверку.

1. $u_{tt}=u_{xx},\ x\in(0,\ 2),\ t\in(0,\ \infty);$
$u|_{t=0}=5\sin 4\pi x+\sin 5\pi x,\ u_t|_{t=0}=3\sin 2\pi x;$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=2}=0.$

2. $u_{tt}=9u_{xx},\ x\in(0,\ 4),\ t\in(0,\ \infty);$
$u|_{t=0}=7\sin 3\pi x+\sin 6\pi x,\ u_t|_{t=0}=\sin \pi x;$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=4}=0.$

3. $u_{tt}=4u_{xx},\ x\in(0,\ 3),\ t\in(0,\ \infty);$
$u|_{t=0}=4\sin 2\pi x+6\sin 3\pi x,\ u_t|_{t=0}=5\sin 4\pi x;$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=3}=0.$

4. $u_{tt}=25u_{xx},\ x\in(0,\ 2),\ t\in(0,\ \infty);$
$u|_{t=0}=7\sin \pi x,\ u_t|_{t=0}=4\sin \pi x+2\sin 3\pi x;$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=2}=0.$

5. $u_{tt}=49u_{xx},\ x\in(0,\ 3),\ t\in(0,\ \infty);$
$u|_{t=0}=2\sin 2\pi x+\sin 3\pi x,\ u_t|_{t=0}=6\sin 5\pi x;$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=3}=0.$

6. $u_{tt}=9u_{xx},\ x\in(0,\ 4),\ t\in(0,\ \infty);$
$u|_{t=0}=\sin 4\pi x,\ u_t|_{t=0}=6\sin 2\pi x+4\sin 3\pi x;$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=4}=0.$

7. $u_{tt}=4u_{xx},\ x\in(0,\,5),\ t\in(0,\,\infty);$
$u|_{t=0}=3\sin\pi x-2\sin4\pi x,\ u_t|_{t=0}=4\sin2\pi x+\sin3\pi x;$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=5}=0.$

8. $u_{tt}=36u_{xx},\ x\in(0,\,2),\ t\in(0,\,\infty);$
$u|_{t=0}=5\sin4\pi x+\sin5\pi x,\ u_t|_{t=0}=3\sin2\pi x;$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=2}=0.$

9. $u_{tt}=25u_{xx},\ x\in(0,\,5),\ t\in(0,\,\infty);$
$u|_{t=0}=2\sin3\pi x,\ u_t|_{t=0}=8\sin\pi x-4\sin2\pi x;$
$uu|_{x=0}=0,\ u|_{x=5}=0.$

10. $u_{tt}=4u_{xx},\ x\in(0,\,4),\ t\in(0,\,\infty);$
$u|_{t=0}=\sin\pi x-7\sin2\pi x,\ u_t|_{t=0}=2\sin2\pi x+3\sin4\pi x;$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=4}=0.$

11. $u_{tt}=4u_{xx},\ x\in(0,\,5),\ t\in(0,\,\infty);$
$u|_{t=0}=3\sin4\pi x+\sin7\pi x,\ u_t|_{t=0}=2\sin3\pi x;$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=5}=0.$

12. $u_{tt}=16u_{xx},\ x\in(0,\,2),\ t\in(0,\,\infty);$
$u|_{t=0}=4\sin2\pi x+\sin5\pi x,\ u_t|_{t=0}=12\sin\pi x;$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=2}=0.$

13. $u_{tt}=25u_{xx},\ x\in(0,\,3),\ t\in(0,\,\infty);$
$u|_{t=0}=6\sin2\pi x+2\sin3\pi x,\ u_t|_{t=0}=8\sin4\pi x;$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=3}=0.$

14. $u_{tt}=49u_{xx},\ x\in(0,\,2),\ t\in(0,\,\infty);$
$u|_{t=0}=12\sin\pi x,\ u_t|_{t=0}=3\sin\pi x+4\sin3\pi x;$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=2}=0.$

15. $u_{tt}=9u_{xx},\ x\in(0,\,1),\ t\in(0,\,\infty);$
$u|_{t=0}=5\sin4\pi x+\sin5\pi x,\ u_t|_{t=0}=4\sin3\pi x;$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=1}=0.$

16. $u_{tt}=u_{xx},\ x\in(0,\,7),\ t\in(0,\,\infty);$
$u|_{t=0}=\sin2\pi x,\ u_t|_{t=0}=5\sin\pi x+4\sin3\pi x;$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=7}=0.$

17. $u_{tt}=4u_{xx},\ x\in(0,\,2),\ t\in(0,\,\infty);$
$u|_{t=0}=8\sin\pi x-21\sin4\pi x,\ u_t|_{t=0}=\sin2\pi x+6\sin3\pi x;$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=2}=0.$

18. $u_{tt}=16u_{xx},\ x\in(0,\,2),\ t\in(0,\,\infty);$
$u|_{t=0}=9\sin4\pi x+3\sin5\pi x,\ u_t|_{t=0}=8\sin2\pi x;$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=2}=0.$

19. $u_{tt}=25u_{xx},\ x\in(0,3),\ t\in(0,\infty);$
$u|_{t=0}=5\sin 3\pi x,\ u_t|_{t=0}=2\sin 2\pi x-4\sin 4\pi x;$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=3}=0.$

20. $u_{tt}=49u_{xx},\ x\in(0,4),\ t\in(0,\infty);$
$u|_{t=0}=5\sin \pi x-3\sin 5\pi x,\ u_t|_{t=0}=6\sin 2\pi x+\sin 4\pi x;$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=4}=0.$

21. $u_{tt}=9u_{xx},\ x\in(0,2),\ t\in(0,\infty);$
$u|_{t=0}=15\sin 2\pi x+4\sin 5\pi x,\ u_t|_{t=0}=2\sin 3\pi x;$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=2}=0.$

22. $u_{tt}=16u_{xx},\ x\in(0,4),\ t\in(0,\infty);$
$u|_{t=0}=5\sin 2\pi x+3\sin 5\pi x,\ u_t|_{t=0}=\sin \pi x;$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=4}=0.$

23. $u_{tt}=4u_{xx},\ x\in(0,3),\ t\in(0,\infty);$
$u|_{t=0}=4\sin 2\pi x+6\sin 3\pi x,\ u_t|_{t=0}=5\sin 4\pi x;$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=3}=0.$

24. $u_{tt}=64u_{xx},\ x\in(0,1),\ t\in(0,\infty);$
$u|_{t=0}=-5\sin \pi x,\ u_t|_{t=0}=\sin 2\pi x+2\sin 3\pi x;$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=1}=0.$

25. $u_{tt}=81u_{xx},\ x\in(0,2),\ t\in(0,\infty);$
$u|_{t=0}=9\sin 2\pi x+3\sin 3\pi x,\ u_t|_{t=0}=6\sin 4\pi x;$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=2}=0.$

26. $u_{tt}=u_{xx},\ x\in(0,5),\ t\in(0,\infty);$
$u|_{t=0}=\sin 2\pi x,\ u_t|_{t=0}=2\sin 3\pi x+6\sin 4\pi x;$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=5}=0.$

27. $u_{tt}=49u_{xx},\ x\in(0,3),\ t\in(0,\infty);$
$u|_{t=0}=5\sin \pi x-4\sin 3\pi x,\ u_t|_{t=0}=2\sin 2\pi x+3\sin 4\pi x;$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=3}=0.$

28. $u_{tt}=16u_{xx},\ x\in(0,1),\ t\in(0,\infty);$
$u|_{t=0}=2\sin \pi x+\sin 4\pi x,\ u_t|_{t=0}=6\sin 2\pi x;$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=1}=0.$

29. $u_{tt}=81u_{xx},\ x\in(0,3),\ t\in(0,\infty);$
$u|_{t=0}=3\sin 3\pi x+2\sin 4x,\ u_t|_{t=0}=4\sin \pi x-5\sin 2\pi x;$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=3}=0.$

30. $u_{tt}=25u_{xx},\ x\in(0,3),\ t\in(0,\infty);$
$u|_{t=0}=\sin 2\pi x-4\sin 4\pi x,\ u_t|_{t=0}=2\sin \pi x+3\sin 3\pi x;$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=3}=0.$

6. Решить задачу Коши. Сделать проверку.

1. $u_t = u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$;
   $u|_{t=0} = 2x^2 + 3x - 5$.
2. $u_t = 3u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$;
   $u|_{t=0} = 4x^2 - 38x - 51$.
3. $u_t = 5u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$;
   $u|_{t=0} = -3x^2 + 4x + 6$.
4. $u_t = 4u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$;
   $u|_{t=0} = 2 - 5x + 7x^2$.
5. $u_t = 8u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$;
   $u|_{t=0} = 2x^2 + 3x + 5$.
6. $u_t = 9u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$;
   $u|_{t=0} = 6x^2 + 4x - 12$.
7. $u_t = 11u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$;
   $u|_{t=0} = 5x^2 - 6x + 2$.
8. $u_t = 3u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$;
   $u|_{t=0} = 4x^2 - 38x - 51$.
9. $u_t = 2u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$;
   $u|_{t=0} = 3x^2 + 10x - 21$.
10. $u_t = 10u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$;
    $u|_{t=0} = 9x^2 + 36x - 32$.
11. $u_t = 11u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$;
    $u|_{t=0} = 2x^2 + 3x - 5$.
12. $u_t = 12u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$;
    $u|_{t=0} = -x^2 + 2x + 9$.
13. $u_t = 5u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$;
    $u|_{t=0} = -3x^2 + 4x + 6$.
14. $u_t = 14u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$;
    $u|_{t=0} = 3x^2 + 6x - 32$.
15. $u_t = 15u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$;
    $u|_{t=0} = 7x^2 + 34x - 2$.
16. $u_t = 16u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$;
    $u|_{t=0} = -4x^2 + 7x - 22$.
17. $u_t = 3u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$;
    $u|_{t=0} = 12x^2 - 3x + 6$.

18. $u_t = 7u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$;
$u|_{t=0} = 2 - 3x - 5x^2$.

19. $u_t = 12u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$;
$u|_{t=0} = 8x^2 + 15x - 30$.

20. $u_t = 4u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$;
$u|_{t=0} = -3x^2 + 23x - 17$.

21. $u_t = 21u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$;
$u|_{t=0} = x^2 - 12x - 51$.

22. $u_t = 15u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$;
$u|_{t=0} = -4x^2 + 8x - 5$.

23. $u_t = 25u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$;
$u|_{t=0} = 4x^2 + 7x + 62$.

24. $u_t = 21u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$;
$u|_{t=0} = 22 - 6x + 3x^2$.

25. $u_t = 25u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$;
$u|_{t=0} = x^2 + 23x - 45$.

26. $u_t = 4u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$;
$u|_{t=0} = 62x^2 + 43x - 123$.

27. $u_t = 27u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$;
$u|_{t=0} = 3x^2 - 15x + 41$.

28. $u_t = 16u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$;
$u|_{t=0} = 9x^2 + 12x - 32$.

29. $u_t = 2u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$;
$u|_{t=0} = 15x^2 - 40x + 47$.

30. $u_t = 30u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$;
$u|_{t=0} = -9x^2 + 23x - 26$.

7. Решить первую смешанную задачу на отрезке. Сделать проверку.

1. $u_t = u_{xx}$, $x \in (0, 2)$, $t \in (0, \infty)$;
$u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=2} = 0$;
$u|_{t=0} = 6\sin\pi x + 9\sin 2\pi x$.

2. $u_t = 9u_{xx}$, $x \in (0, 4)$, $t \in (0, \infty)$;
$u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=4} = 0$;
$u|_{t=0} = 2\sin 3\pi x + 7\sin 4\pi x$.

3. $u_t = 4u_{xx},\ x \in (0, 3),\ t \in (0, \infty);$
$u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=3} = 0;$
$u|_{t=0} = 5\sin 2\pi x + 3\sin 5\pi x.$

4. $u_t = 25u_{xx},\ x \in (0, 1),\ t \in (0, \infty);$
$u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=1} = 0;$
$u|_{t=0} = 12\sin \pi x + 11\sin 4\pi x.$

5. $u_t = 16u_{xx},\ x \in (0, 5),\ t \in (0, \infty);$
$u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=5} = 0;$
$u|_{t=0} = 6\sin^3 \pi x.$

6. $u_t = 9u_{xx},\ x \in (0, 2),\ t \in (0, \infty);$
$u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=2} = 0;$
$u|_{t=0} = 2\sin 2\pi x - 5\sin 2\pi x + \sin 3\pi x.$

7. $u_t = 4u_{xx},\ x \in (0, 4),\ t \in (0, \infty);$
$u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=4} = 0;$
$u|_{t=0} = 9\sin 2\pi x - \sin 4\pi x.$

8. $u_t = 36u_{xx},\ x \in (0, 3),\ t \in (0, \infty);$
$u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=3} = 0;$
$u|_{t=0} = 3\sin^3 \pi x + 2\sin 3\pi x.$

9. $u_t = 4u_{xx},\ x \in (0, 5),\ t \in (0, \infty);$
$u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=5} = 0;$
$u|_{t=0} = 12\sin 3\pi x - 21\sin 5\pi x.$

10. $u_t = 9u_{xx},\ x \in (0, 3),\ t \in (0, \infty);$
$u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=3} = 0;$
$u|_{t=0} = 18\sin^3 \pi x + 7\sin 2\pi x.$

11. $u_t = 16u_{xx},\ x \in (0, 2),\ t \in (0, \infty);$
$u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=2} = 0;$
$u|_{t=0} = 5\sin 2\pi x + 3\sin 5\pi x.$

12. $u_t = 25u_{xx},\ x \in (0, 3),\ t \in (0, \infty);$
$u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=3} = 0;$
$u|_{t=0} = 7\sin \pi x + 12\sin 3\pi x.$

13. $u_t = 16u_{xx},\ x \in (0, 2),\ t \in (0, \infty);$
$u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=2} = 0;$
$u|_{t=0} = 3\sin 3\pi x + 4\sin 4\pi x.$

14. $u_t = 49u_{xx},\ x \in (0, 1),\ t \in (0, \infty);$
$u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=1} = 0;$
$u|_{t=0} = 8\sin \pi x + 4\sin 5\pi x.$

15. $u_t=64u_{xx},\ x\in(0,2),\ t\in(0,\infty);$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=2}=0;$
$u|_{t=0}=3\sin 3\pi x-2\sin 6\pi x.$

16. $u_t=u_{xx},\ x\in(0,4),\ t\in(0,\infty);$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=4}=0;$
$u|_{t=0}=\sin 2\pi x-5\sin 3\pi x+3\sin 4\pi x.$

17. $u_t=4u_{xx},\ x\in(0,2),\ t\in(0,\infty);$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=2}=0;$
$u|_{t=0}=4\sin 4\pi x-6\sin 6\pi x.$

18. $u_t=9u_{xx},\ x\in(0,4),\ t\in(0,\infty);$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=4}=0;$
$u|_{t=0}=2\sin 3\pi x+6\sin 5\pi x.$

19. $u_t=64u_{xx},\ x\in(0,5),\ t\in(0,\infty);$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=5}=0;$
$u|_{t=0}=15\sin\pi x-21\sin 4\pi x.$

20. $u_t=16u_{xx},\ x\in(0,3),\ t\in(0,\infty);$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=3}=0;$
$u|_{t=0}=2\sin^3\pi x+\sin 2\pi x.$

21. $u_t=4u_{xx},\ x\in(0,2),\ t\in(0,\infty);$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=2}=0;$
$u|_{t=0}=16\sin\pi x+7\sin 2\pi x.$

22. $u_t=81u_{xx},\ x\in(0,4),\ t\in(0,\infty);$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=4}=0;$
$u|_{t=0}=12\sin 2\pi x+17\sin 5\pi x.$

23. $u_t=25u_{xx},\ x\in(0,3),\ t\in(0,\infty);$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=3}=0;$
$u|_{t=0}=9\sin 2\pi x+7\sin 4\pi x.$

24. $u_t=36u_{xx},\ x\in(0,2),\ t\in(0,\infty);$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=2}=0;$
$u|_{t=0}=3\sin 3\pi x+6\sin 6\pi x.$

25. $u_t=64u_{xx},\ x\in(0,4),\ t\in(0,\infty);$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=4}=0;$
$u|_{t=0}=8\sin^3\pi x.$

26. $u_t=81u_{xx},\ x\in(0,4),\ t\in(0,\infty);$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=4}=0;$
$u|_{t=0}=21\sin 2\pi x-52\sin 4\pi x+6\sin 6\pi x.$

27. $u_t = 49u_{xx}$, $x \in (0, 4)$, $t \in (0, \infty)$;
$u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=4} = 0$;
$u|_{t=0} = 3\sin 2\pi x - 5\sin 5\pi x$.

28. $u_t = 16u_{xx}$, $x \in (0, 3)$, $t \in (0, \infty)$;
$u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=3} = 0$;
$u|_{t=0} = 4\sin^3 \pi x + 5\sin 3\pi x$.

29. $u_t = u_{xx}$, $x \in (0, 5)$, $t \in (0, \infty)$;
$u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=5} = 0$;
$u|_{t=0} = 3\sin 2\pi x - 5\sin 3\pi x$.

30. $u_t = 81u_{xx}$, $x \in (0, 2)$, $t \in (0, \infty)$;
$u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=2} = 0$;
$u|_{t=0} = 18\sin \pi x + 5\sin 2\pi x$.

8. Решить задачу Дирихле для круга. Сделать проверку.

1. $\Delta u = 0$, $r \in [0, 3)$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$;
$u|_{r=1} = 3\sin\varphi - 4\sin 2\varphi$.

2. $\Delta u = 0$, $r \in [0, 4)$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$;
$u|_{r=4} = 5\sin\varphi - 11\cos 3\varphi + \sin 4\varphi$.

3. $\Delta u = 0$, $r \in [0, 2)$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$;
$u|_{r=2} = 2\sin 2\varphi - 6\cos 2\varphi + \sin 3\varphi$.

4. $\Delta u = 0$, $r \in [0, 5)$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$;
$u|_{r=5} = 3\sin 3\varphi + 5\cos 3\varphi + 2\sin 5\varphi$.

5. $\Delta u = 0$, $r \in [0, 1)$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$;
$u|_{r=1} = 2\sin^2\varphi - 8\cos^2 2\varphi + 3\sin 3\varphi$.

6. $\Delta u = 0$, $r \in [0, 2)$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$;
$u|_{r=2} = \sin^3\varphi + 6\cos^3 2\varphi$.

7. $\Delta u = 0$, $r \in [0, 4)$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$;
$u|_{r=1} = \cos\varphi - 3\sin\varphi + 12\cos 2\varphi$.

8. $\Delta u = 0$, $r \in [0, 3)$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$;
$u|_{r=3} = 2\sin 2\varphi - 6\cos\varphi + 4\cos 3\varphi$.

9. $\Delta u = 0$, $r \in [0, 1)$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$;
$u|_{r=1} = 4\cos 2\varphi + 5\sin\varphi + 2\cos^3 3\varphi$.

10. $\Delta u = 0$, $r \in [0, 1)$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$;
$u|_{r=1} = 7\sin\varphi - 5\cos 2\varphi + 2\sin 3\varphi$.

11. $\Delta u = 0,\ r \in [0, 3),\ \varphi \in (-\pi, \pi];$
$u|_{r=3} = 2\sin 2\varphi - 3\sin 3\varphi + \cos\varphi.$

12. $\Delta u = 0,\ r \in [0, 2),\ \varphi \in (-\pi, \pi];$
$u|_{r=2} = 3\sin\varphi + 4\cos 3\varphi + 2\sin 3\varphi.$

13. $\Delta u = 0,\ r \in [0, 5),\ \varphi \in (-\pi, \pi];$
$u|_{r=5} = 4\sin 2\varphi + 5\cos\varphi + 3\sin 3\varphi.$

14. $\Delta u = 0,\ r \in [0, 1),\ \varphi \in (-\pi, \pi];$
$u|_{r=1} = 4\sin\varphi + 6\cos 3\varphi + 3\sin 3\varphi.$

15. $\Delta u = 0,\ r \in [0, 3),\ \varphi \in (-\pi, \pi];$
$u|_{r=3} = 2\sin^2\varphi + 4\cos^2 2\varphi + 5\cos 3\varphi.$

16. $\Delta u = 0,\ r \in [0, 4),\ \varphi \in (-\pi, \pi];$
$u|_{r=4} = \sin^2\varphi + 2\cos^3 2\varphi - \sin 3\varphi.$

17. $\Delta u = 0,\ r \in [0, 6),\ \varphi \in (-\pi, \pi];$
$u|_{r=6} = 4\sin 2\varphi + 7\cos 3\varphi - 6\sin 4\varphi.$

18. $\Delta u = 0,\ r \in [0, 1),\ \varphi \in (-\pi, \pi];$
$u|_{r=1} = 4\sin\varphi + 7\cos\varphi + 5\cos 2\varphi.$

19. $\Delta u = 0,\ r \in [0, 2),\ \varphi \in (-\pi, \pi];$
$u|_{r=2} = 4 + 3\cos\varphi - 5\sin\varphi + 4\cos^3 3\varphi.$

20. $\Delta u = 0,\ r \in [0, 4),\ \varphi \in (-\pi, \pi];$
$u|_{r=3} = 3\sin\varphi - 8\cos 2\varphi + 4\sin 3\varphi.$

21. $\Delta u = 0,\ r \in [0, 5),\ \varphi \in (-\pi, \pi];$
$u|_{r=3} = 3 + 2\sin\varphi - 5\sin 2\varphi + \cos\varphi.$

22. $\Delta u = 0,\ r \in [0, 2),\ \varphi \in (-\pi, \pi];$
$u|_{r=2} = \sin\varphi + 4\cos 3\varphi - 2\sin 2\varphi.$

23. $\Delta u = 0,\ r \in [0, 4),\ \varphi \in (-\pi, \pi];$
$u|_{r=4} = 3\sin\varphi + 7\cos\varphi + 2\sin 2\varphi.$

24. $\Delta u = 0,\ r \in [0, 1),\ \varphi \in (-\pi, \pi];$
$u|_{r=1} = \sin 3\varphi + 4\cos\varphi + 5\sin 4\varphi.$

25. $\Delta u = 0,\ r \in [0, 3),\ \varphi \in (-\pi, \pi];$
$u|_{r=3} = -4\cos^2 2\varphi + 5\sin 2\varphi - \sin 3\varphi.$

26. $\Delta u = 0,\ r \in [0, 4),\ \varphi \in (-\pi, \pi];$
$u|_{r=2} = \sin 5\varphi + 6\cos 2\varphi - \cos 3\varphi.$

27. $\Delta u = 0,\ r \in [0, 3),\ \varphi \in (-\pi, \pi];$
$u|_{r=3} = \sin 2\varphi + 2\cos 3\varphi + 5\cos 3\varphi.$

28. $\Delta u=0,\ r\in[0,6),\ \varphi\in(-\pi,\pi];$
$u|_{r=6}=6\sin2\varphi+3\cos\varphi+5\cos2\varphi.$

29. $\Delta u=0,\ r\in[0,4),\ \varphi\in(-\pi,\pi];$
$u|_{r=4}=\cos\varphi+3\sin\varphi+5\sin2\varphi+2\mathrm{co}3\varphi.$

30. $\Delta u=0,\ r\in[0,1),\ \varphi\in(-\pi,\pi];$
$u|_{r=1}=3\sin2\varphi+7\cos\varphi+8\sin3\varphi.$

9. Решить задачу Дирихле для кольца. Сделать проверку.

1. $\Delta u=0,\ 1<r<2,\ \varphi\in(-\pi,\pi];$
$u|_{r=1}=1+\sin\varphi,\ u|_{r=2}=\cos\varphi+\sin3\varphi.$

2. $\Delta u=0,\ 1<r<3,\ \varphi\in(-\pi,\pi];$
$u|_{r=1}=2\sin\varphi,\ u|_{r=3}=3\cos2\varphi-4\sin2\varphi.$

3. $\Delta u=0,\ 2<r<3,\ \varphi\in(-\pi,\pi];$
$u|_{r=2}=2+5\cos\varphi,\ u|_{r=3}=\sin2\varphi+3\cos3\varphi.$

4. $\Delta u=0,\ 2<r<4,\ \varphi\in(-\pi,\pi];$
$u|_{r=2}=2\cos2\varphi,\ u|_{r=4}=1+\cos\varphi-5\sin2\varphi.$

5. $\Delta u=0,\ 1<r<5,\ \varphi\in(-\pi,\pi];$
$u|_{r=1}=1+2\sin\varphi-\cos\varphi,\ u|_{r=5}=2+\cos\varphi+\sin2\varphi.$

6. $\Delta u=0,\ 3<r<4,\ \varphi\in(-\pi,\pi];$
$u|_{r=3}=3-4\sin3\varphi+\cos\varphi,\ u|_{r=4}=1+2\cos\varphi-\sin\varphi.$

7. $\Delta u=0,\ 2<r<3,\ \varphi\in(-\pi,\pi];$
$u|_{r=2}=3\sin\varphi+2\cos2\varphi,\ u|_{r=3}=3+2\cos\varphi-4\sin2\varphi.$

8. $\Delta u=0,\ 1<r<2,\ \varphi\in(-\pi,\pi];$
$u|_{r=1}=4+2\sin2\varphi-\cos3\varphi,\ u|_{r=2}=2+5\cos\varphi+4\sin2\varphi.$

9. $\Delta u=0,\ 3<r<6,\ \varphi\in(-\pi,\pi];$
$u|_{r=3}=4\sin2\varphi-6\cos3\varphi,\ u|_{r=6}=3-\cos2\varphi+4\sin3\varphi.$

10. $\Delta u=0,\ 1<r<4,\ \varphi\in(-\pi,\pi];$
$u|_{r=1}=1+\sin^3\varphi,\ u|_{r=5}=2-\cos^3\varphi.$

11. $\Delta u=0,\ 1<r<2,\ \varphi\in(-\pi,\pi];$
$u|_{r=1}=\cos2\varphi,\ u|_{r=2}=2\cos\varphi+4\sin3\varphi.$

12. $\Delta u=0,\ 2<r<3,\ \varphi\in(-\pi,\pi];$
$u|_{r=2}=2\sin\varphi,\ u|_{r=3}=3\cos\varphi-\sin2\varphi.$

13. $\Delta u=0,\ 1<r<4,\ \varphi\in(-\pi,\pi];$
$u|_{r=1}=5+3\sin\varphi,\ u|_{r=4}=2\sin2\varphi-3\cos2\varphi.$

14. $\Delta u = 0,\ 1 < r < 2,\ \varphi \in (-\pi, \pi];$
$u|_{r=1} = 2\cos\varphi + \sin 2\varphi,\ u|_{r=2} = \cos 2\varphi + 3\sin 3\varphi.$

15. $\Delta u = 0,\ 2 < r < 4,\ \varphi \in (-\pi, \pi];$
$u|_{r=2} = 5\sin\varphi - 2\cos 2\varphi,\ u|_{r=4} = 2\cos\varphi + 3\sin 2\varphi.$

16. $\Delta u = 0,\ 1 < r < 3,\ \varphi \in (-\pi, \pi];$
$u|_{r=1} = 2 - 2\sin 3\varphi + 5\cos 2\varphi,\ u|_{r=3} = 2\cos\varphi - \sin 2\varphi.$

17. $\Delta u = 0,\ 3 < r < 4,\ \varphi \in (-\pi, \pi];$
$u|_{r=3} = 8\sin\varphi + 5\cos 4\varphi,\ u|_{r=4} = 4 - 2\cos 2\varphi + 4\sin 2\varphi.$

18. $\Delta u = 0,\ 1 < r < 5,\ \varphi \in (-\pi, \pi];$
$u|_{r=1} = 2\sin\varphi + 6\cos\varphi,\ u|_{r=5} = 2 + 3\cos\varphi + 4\sin 2\varphi.$

19. $\Delta u = 0,\ 3 < r < 6,\ \varphi \in (-\pi, \pi];$
$u|_{r=3} = 6\cos 2\varphi,\ u|_{r=6} = -2\sin\varphi + 4\sin 2\varphi.$

20. $\Delta u = 0,\ 1 < r < 3,\ \varphi \in (-\pi, \pi];$
$u|_{r=1} = \sin\varphi + 2\cos 2\varphi,\ u|_{r=3} = 1 - \cos\varphi.$

21. $\Delta u = 0,\ 1 < r < 4,\ \varphi \in (-\pi, \pi];$
$u|_{r=2} = 5 + 2\cos 2\varphi,\ u|_{r=5} = 3\cos\varphi + 5\sin 2\varphi.$

22. $\Delta u = 0,\ 1 < r < 3,\ \varphi \in (-\pi, \pi];$
$u|_{r=1} = 1 - \sin\varphi,\ u|_{r=3} = 5\cos\varphi - 4\sin 3\varphi.$

23. $\Delta u = 0,\ 1 < r < 2,\ \varphi \in (-\pi, \pi];$
$u|_{r=1} = 2\cos 2\varphi,\ u|_{r=2} = 5\sin 2\varphi - 4\cos 3\varphi.$

24. $\Delta u = 0,\ 2 < r < 4,\ \varphi \in (-\pi, \pi];$
$u|_{r=2} = 20\cos\varphi,\ u|_{r=4} = 6\cos 2\varphi + 5\sin 2\varphi.$

25. $\Delta u = 0,\ 2 < r < 4,\ \varphi \in (-\pi, \pi];$
$u|_{r=2} = \sin 5\varphi + 6\cos 2\varphi - \cos 3\varphi.$

26. $\Delta u = 0,\ 1 < r < 2,\ \varphi \in (-\pi, \pi];$
$u|_{r=1} = -4 + \sin\varphi + 2\cos 2\varphi,\ u|_{r=2} = 3 - 5\cos 4\varphi.$

27. $\Delta u = 0,\ 2 < r < 4,\ \varphi \in (-\pi, \pi];$
$u|_{r=2} = 3 + 4\sin\varphi + 2\cos 2\varphi,\ u|_{r=4} = 5\cos 3\varphi - \sin 3\varphi.$

28. $\Delta u = 0,\ 2 < r < 5,\ \varphi \in (-\pi, \pi];$
$u|_{r=2} = 5 + 4\sin\varphi,\ u|_{r=5} = 6\sin 2\varphi + 4\cos\varphi.$

29. $\Delta u = 0,\ 2 < r < 3,\ \varphi \in (-\pi, \pi];$
$u|_{r=1} = 2\cos^2 2\varphi,\ u|_{r=2} = 12\cos\varphi - 8\sin 3\varphi.$

30. $\Delta u = 0,\ 1 < r < 2,\ \varphi \in (-\pi, \pi];$
$u|_{r=1} = 1 - 2\cos 2\varphi,\ u|_{r=2} = 5\cos 3\varphi.$

10. Решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона в круге. Сделать проверку.

1. $\Delta u = x^2 - y^2$, $0 \le r < 1$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $u|_{r=1} = 4\cos\varphi + 3\sin 2\varphi$.
2. $\Delta u = x^2 - y^2$, $0 \le r < 3$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $u|_{r=3} = 6\sin 4\varphi - \cos 3\varphi$.
3. $\Delta u = x^4 - y^4$, $0 \le r < 2$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $u|_{r=4} = 3\sin\varphi$.
4. $\Delta u = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$, $0 \le r < 1$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $u|_{r=1} = 2 + \cos 2\varphi$.
5. $\Delta u = x^2 - y^2$, $0 \le r < 3$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $u|_{r=3} = 1 - 4\sin 3\varphi$.
6. $\Delta u = x^2 + y^2$, $0 \le r < 4$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $u|_{r=4} = 3 - 2\sin\varphi + \cos 2\varphi$.
7. $\Delta u = x^4 - y^4$, $0 \le r < 2$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $u|_{r=2} = 7 - \cos 3\varphi + \sin 3\varphi$.
8. $\Delta u = x^2 - y^2$, $0 \le r < 1$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $u|_{r=1} = \sin^3\varphi$.
9. $\Delta u = x^2 - y^2$, $0 \le r < 1$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $u|_{r=1} = \cos^3\varphi$.
10. $\Delta u = x^2 + y^2$, $0 \le r < 1$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $u|_{r=1} = 2 + \sin 2\varphi + \cos\varphi$.
11. $\Delta u = x^2 - y^2$, $0 \le r < 1$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $u|_{r=1} = 4\cos\varphi + 3\sin 2\varphi$.
12. $\Delta u = x^2 - y^2$, $0 \le r < 3$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $u|_{r=3} = 6\sin 4\varphi - \cos 3\varphi$.
13. $\Delta u = x^4 - y^4$, $0 \le r < 2$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $u|_{r=4} = 3\sin\varphi$.
14. $\Delta u = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$, $0 \le r < 1$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $u|_{r=1} = 2 + \cos 2\varphi$.
15. $\Delta u = x^2 - y^2$, $0 \le r < 3$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $u|_{r=3} = 1 - 4\sin 3\varphi$.
16. $\Delta u = x^2 + y^2$, $0 \le r < 4$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $u|_{r=4} = 3 - 2\sin\varphi + \cos 2\varphi$.
17. $\Delta u = x^4 - y^4$, $0 \le r < 2$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $u|_{r=2} = 7 - \cos 3\varphi + \sin 3\varphi$.
18. $\Delta u = x^2 - y^2$, $0 \le r < 1$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $u|_{r=1} = \sin^3\varphi$.
19. $\Delta u = x^2 - y^2$, $0 \le r < 1$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $u|_{r=1} = \cos^3\varphi$.
20. $\Delta u = x^2 + y^2$, $0 \le r < 1$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $u|_{r=1} = 2 + \sin 2\varphi + \cos\varphi$.
21. $\Delta u = x^2 - y^2$, $0 \le r < 1$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $u|_{r=1} = 4\cos\varphi + 3\sin 2\varphi$.
22. $\Delta u = x^2 - y^2$, $0 \le r < 3$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $u|_{r=3} = 6\sin 4\varphi - \cos 3\varphi$.
23. $\Delta u = x^4 - y^4$, $0 \le r < 2$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $u|_{r=4} = 3\sin\varphi$.
24. $\Delta u = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$, $0 \le r < 1$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $u|_{r=1} = 2 + \cos 2\varphi$.
25. $\Delta u = x^2 - y^2$, $0 \le r < 3$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $u|_{r=3} = 1 - 4\sin 3\varphi$.
26. $\Delta u = x^2 + y^2$, $0 \le r < 4$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $u|_{r=4} = 3 - 2\sin\varphi + \cos 2\varphi$.
27. $\Delta u = x^4 - y^4$, $0 \le r < 2$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $u|_{r=2} = 7 - \cos 3\varphi + \sin 3\varphi$.
28. $\Delta u = x^2 - y^2$, $0 \le r < 1$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $u|_{r=1} = \sin^3\varphi$.
29. $\Delta u = x^2 - y^2$, $0 \le r < 1$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $u|_{r=1} = \cos^3\varphi$.
30. $\Delta u = x^2 + y^2$, $0 \le r < 1$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $u|_{r=1} = 2 + \sin 2\varphi + \cos\varphi$.

XIV. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**	**Е**	**Ё**	**Ж**	**З**	**И**	**Й**	**К**	**Л**	**М**	**Н**	**О**	**П**
18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	
Р	**С**	**Т**	**У**	**Ф**	**Х**	**Ц**	**Ч**	**Ш**	**Щ**	**Ъ**	**Ы**	**Ь**	**Э**	**Ю**	**Я**	

Пусть A, B, C — порядковые номера, которые имеют Ваши инициалы (буквы) в русском алфавите, N — номер варианта.

1. Вычислить с точностью до 10^{-4} значения величин $a=\dfrac{N}{A+1}$, $b=\dfrac{N}{B+1}$, $c=\dfrac{N}{C+1}$. Найти точность вычисления величины

$$(C-B-N)\sqrt{ab+abc+c^2N}-(A-N)a-(B-N)b-(C-N)c.$$

2. Приблизить многочленами функцию, заданную таблицей, построить графики. Вычислить значение каждой функции в точках $x=0{,}4$ и $x=1{,}6$.

x	0	1	2
y	$A-N$	$C-N$	$B-C$

x	0	0,5	1	1,5	2
y	$A-N$	$B-N$	$C-N$	$A-B$	$B-C$

3. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_{A-B}^{N}\left[(C-N)x^3+(B-N)x+A\right]dx$

приближенно двумя различными способами, разбив отрезок интегрирования на 8 частей (шаг взять с точностью до 10^{-2}). Сравнить с точным значением интеграла. Найти абсолютные и относительные погрешности.

4. Решить точно и приближенно задачу Коши $y' = (B+C-N) + Cx^{A+N}$, $y(x_0) = A-N$, найти значение решения в точке $x = \dfrac{A+B+C}{N+10}$, выбрав начальную точку x_0 так, чтобы выполнялось неравенство $|x - x_0| < 10^{-2}$. Взять шаг $h = \dfrac{|x - x_0|}{10}$.

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

Формулы сокращенного умножения:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b);$$

$$a^3 \pm b^3=(a \pm b)(a^2 \mp ab+b^2);$$

$$(a \pm b)^3=a^3 \pm 3a^2b+3ab^2 \pm b^3=a^3 \pm b^3 \pm 3a(a \pm b).$$

Правила действия со степенями $(a>0)$:

$$a^m \cdot a^n=a^{m+n}; \quad a^0=1; \quad a^{-m}=\frac{1}{a^m}; \quad \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}; \quad \sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}.$$

Выделение полного квадрата и разложение квадратного трехчлена на множители:

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a};$$

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где $x_{1,2}=\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Виды разложений на простейшие дроби:

$$\frac{ax+b}{(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2};$$

$$\frac{ax^2+bx+c}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3};$$

$$\frac{ax^2+bx+c}{(x-x_1)^2(x-x_2)}=\frac{A}{(x-x_1)^2}+\frac{B}{x-x_1}+\frac{C}{x-x_2};$$

$$\frac{ax^2+bx+c}{(x-x_1)(x^2+px+q)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{Bx+C}{x^2+px+q},$$

если $p^2-4c<0$.

Областью определения функции $y=f(x)$ (областью допустимых значений) называется множество таких значений аргумента x, при которых существует значение функции y.

Правила построения графика функции элементарными методами:

1. График $y=f(x-a)$ получается сдвигом графика $y=f(x)$ вдоль оси Ox вправо при $a>0$ и влево при $a<0$.
2. График $y=f(x)+b$ получается сдвигом графика $y=f(x)$ вдоль оси Oy вверх при $b>0$ и вниз при $b<0$.
3. График функции $y=-f(x)$ получается зеркальным отражением относительно оси Ox графика $y=f(x)$.
4. График функции $y=-f(x)$ получается зеркальным отражением относительно оси Oy графика $y=f(x)$.

Элементарные функции:

1. Линейная функция $y=kx+b$.
2. Парабола $y=ax^2+bx+c$.
3. Модуль $y=|x|$.
4. Кубическая парабола $y=x^3$.
5. Квадратный корень $y=\sqrt{x}$.
6. Гипербола $y=\dfrac{1}{x}$.
7. Показательная функция $y=e^x$.
8. Логарифм $y=\log_a x$, натуральный логарифм $y=\ln x$.
9. Синус $y=\sin x$; косинус $y=\cos x$; тангенс $y=\operatorname{tg} x$.
10. Арксинус $y=\arcsin x$; арктангенс $y=\operatorname{arctg} x$.
11. Гиперболический синус $y=\operatorname{sh} x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$;

    гиперболический косинус $y=\operatorname{ch} x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$;

    гиперболический тангенс $y=\operatorname{th} x=\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

Факториал $n! = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$; $n! = n\cdot(n-1)!$; по определению $0! = 1$.

Биномиальные коэффициенты:

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Декартовы координаты (x, y) и полярные координаты (ρ, φ) связаны соотношениями:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi; \end{cases}$$

$$0 \le \rho < +\infty;$$

$$0 \le \varphi < 2\pi \text{ или } -\pi \le \varphi < \pi.$$

На плоскости.

Уравнение прямой, не параллельной оси Oy (k — угловой коэффициент), $y = kx + b$.

Уравнение прямой, параллельной оси Oy: $x = a$.

Общий вид уравнения: $Ax + By + C = 0$. Угловой коэффициент определяется по формуле $k = -\dfrac{A}{B}$.

Две прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$:

- параллельны тогда и только тогда, когда $k_1 = k_2$ и $b_1 \ne b_2$;
- перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1\cdot k_2 = -1$.

Координаты точки пересечения двух непараллельных прямых находятся как решение системы уравнений, задающих эти прямые:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Углом между прямыми $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ называется острый угол между ними. Этот угол находится по формуле $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}$.

Эллипс задается каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Если $a=b$, то это уравнение задает окружность.

Уравнение окружности с центром в точке $M\ (x_0,\ y_0)$ и радиусом R:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

Гипербола задается каноническими уравнениями:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ и } \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1.$$

Парабола задается каноническим уравнением $y=2px$.

Координаты точек пересечения кривой второго порядка и прямой $Ax+By+C=0$ ищутся как решения системы уравнений:

$$\begin{cases} Ax+By+C=0, \\ a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+b_1x+b_2y+c=0. \end{cases}$$

Координаты точек пересечения двух кривых ищутся как решения системы двух уравнений второго порядка.

Определитель второго порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}.$$

Определитель третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{22} \\ a_{32} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Решение системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2, \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3; \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \ \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Δ_y и Δ_z получаются аналогично заменой соответствующего столбца определителя Δ столбцом свободных членов.

Правило Крамера: если $\Delta \neq 0$, то существует единственное решение системы:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \ z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

Если M — точка пространства, O — начало декартовых координат, M_x, M_y и M_z — проекции точки на координатные оси, т. е. координаты точки M, то вектор $\overrightarrow{OM}$ имеет координаты $\overrightarrow{OM} = (M_x, M_y, M_z)$.

Расстояние между точками M (M_x, M_y, M_z) и N (N_x, N_y, N_z) определяется по формуле

$$|MN| = \sqrt{(M_x - N_x)^2 + (M_y - N_y)^2 + (M_z - N_z)^2}.$$

Координаты середины отрезка MN ищут по формулам:

$$x = \frac{M_x + N_x}{2}, \ y = \frac{M_y + N_y}{2}, \ z = \frac{M_z + N_z}{2}.$$

Вектор $\vec{a}$ с началом в точке M и концом в точке N имеет координаты

$$\vec{a} = (N_x - M_x, \ N_y - M_y, \ N_z - M_z).$$

Линейные операции с векторами $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$:

1) $k\vec{a} = (ka_x, \ ka_y, \ ka_z)$, где k — любое действительное число;
2) $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, \ a_y + b_y, \ a_z + b_z)$;
3) $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = (\alpha a_x + \beta b_x, \ \alpha a_y + \beta b_y, \ \alpha a_z + \beta b_z)$, где α и β — любые действительные числа.

Длина (модуль) вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Единичный вектор, сонаправленный с данным, имеет координаты $\vec{e} = \left(\frac{a_x}{|a|}, \frac{a_y}{|a|}, \frac{a_z}{|a|} \right)$.

Если $\vec{a} = \overrightarrow{MN} = (a_x, a_y, a_z)$ и начало M вектора имеет координаты (M_x, M_y, M_z), то координаты конца N ищутся по формулам:

$$N_x = M_x + a_x, \quad N_y = M_y + a_y, \quad N_z = M_z + a_z.$$

Условие коллинеарности двух векторов $\vec{a} \parallel \vec{b}$:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Условие ортогональности векторов $\vec{a} \perp \vec{b}$:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ называется число, равное произведению модулей векторов на косинус угла φ между векторами:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi;$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \text{ (в координатной форме).}$$

Косинус угла φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется формулой

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}, \quad \cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Свойства скалярного произведения:

1) $\vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b}$;
2) $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$, k — любое действительное число;
3) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
4) $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$, причем $\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$.

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, определяемый тремя условиями:

1) $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$;
2) векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ в указанном порядке составляют «правую тройку» векторов;
3) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ вычисляются по формулам:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right),$$

или

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, вычисляется по формуле

$$S = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, вычисляется по формуле

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Свойства векторного произведения:
1) $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$;
2) $(k\vec{a}) \times \vec{b} = k(\vec{a} \times \vec{b})$, k — любое действительное число;
3) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;
4) если $\vec{a} \neq 0$ и $\vec{b} \neq 0$, то $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$.

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Смешанное произведение в координатах вычисляется по формуле

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Условие компланарности трех векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ имеет вид: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$.

Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$, вычисляется по формуле $V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$.

Объем тетраэдра, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$, вычисляется по формуле

$$V_{\text{т}} = \frac{1}{6} \cdot |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

Общее уравнение плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Каноническое уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0\,(x_0,\ y_0,\ z_0)$ и имеющей нормальный вектор $\vec{n} = (A,\ B,\ C)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Уравнение плоскости «в отрезках»: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1\,(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $M_2\,(x_2,\ y_2,\ z_2)$ и $M_3\,(x_3,\ y_3,\ z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0\,(x_0,$ $y_0,\ z_0)$ параллельно двум неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0.$$

Расстояние от точки $M_0\,(x_0,\ y_0,\ z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Прямая как пересечение двух плоскостей $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ определяется совместным заданием этих уравнений, т. е. их системой:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

Чтобы получить координаты точки, лежащей на этой прямой, достаточно произвольным образом задать одну из координат, тогда две другие определятся как решения данной системы.

Канонические уравнения прямой, т. е. прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно направляющему вектору $\vec{s}=(l, m, n)$:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно направляющему вектору $\vec{s}=(l, m, n)$:

$$\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \\ z=z_0+nt. \end{cases}$$

Чтобы получить координаты точки на данной прямой, достаточно параметру t придать какое-либо значение.

Канонические уравнения прямой, проходящие через две данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, имеют вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Чтобы определить точку пересечения (если она существует) прямой

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

и плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, достаточно решить систему трех указанных уравнений (например, по правилу Крамера).

Чтобы определить точку пересечения (если она существует) прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

и плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, достаточно параметрические уравнения прямой подставить в уравнение плоскости, найти значение параметра t и подставить это значение в параметрические уравнения для определения координат точки пересечения.

Для определения точки пересечения прямой и поверхности второго порядка достаточно совместно решить систему уравнений, задающих эту прямую и эту поверхность.

Основные поверхности второго порядка:

- эллипсоид

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1;$$

- сфера радиуса R с центром в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2;$$

- конус

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \frac{(z-z_0)^2}{c^2};$$

- эллиптический параболоид

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 2z;$$

- эллиптический цилиндр

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

A — матрица размера ($m\times n$), имеющая m строк и n столбцов. Элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, обозначается a_{ij}.

E — единичная матрица размера ($n\times n$),

$$e_{ij}=\begin{cases}1 & \text{при } i=j,\\ 0 & \text{при } i\neq j.\end{cases}$$

Линейные операции с матрицами размера ($m\times n$):

1) $k\mathbf{A}=\mathbf{B}$, $b_{ij}=ka_{ij}$, $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, n$, k — любое число;
2) $\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $c_{ij}=b_{ij}+a_{ij}$, $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, n$.

Транспонирование матрицы **A** ($m\times n$):

$$\mathbf{A}^T=\mathbf{B},\ b_{ij}=a_{ji},\ i=1, \dots, m,\ j=1, \dots, n,\ \mathbf{B}\ (n\times m).$$

Произведение матрицы **A** ($m\times n$) на матрицу **B** ($n\times k$) — это матрица **C** ($m\times k$), элементы которой определяются формулой

$$c_{ij}=a_{j1}b_{1j}+a_{j2}b_{2j}+\dots+a_{jn}b_{nj},\ i=1, \dots, m,\ j=1, \dots, k.$$

Свойства произведения матриц:

1) обычно $\mathbf{BA}\neq\mathbf{AB}$; иногда $\mathbf{BA}=\mathbf{AB}$, например, для квадратной матрицы **A**: $\mathbf{EA}=\mathbf{AE}$;
2) $k(\mathbf{A})\mathbf{B}=k(\mathbf{AB})$;
3) $\mathbf{A}(\mathbf{BC})=(\mathbf{AB})\mathbf{C}$;
4) $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$;
5) $(\mathbf{AB})^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$;
6) для квадратной матрицы **A**: $\mathbf{A}^2=\mathbf{AA}$, $\mathbf{A}^n=\underbrace{\mathbf{A}\dots\mathbf{A}}_{n\ \text{раз}}$.

Присоединенной (союзной) матрицей к квадратной матрице **A** называется квадратная матрица $\tilde{\mathbf{A}}$, каждый элемент которой равен алгебраическому дополнению элемента матрицы **A**, т. е.

$$\tilde{a}_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},\ i,\ j=1, \dots, n,$$

где M — определитель элементов матрицы **A**, оставшийся после вычеркивания из определителя матрицы **A** i-й строки и j-го столбца.

Обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$ находится по формуле

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\tilde{\mathbf{A}}^{T}.$$

Проверка правильности вычислений: должны выполняться условия

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}.$$

Элементарными преобразованиями строк матрицы являются:

1) умножение матрицы на ненулевое число;
2) перемена местами двух строк матрицы;
3) прибавление к одной строке матрицы другой строки, умноженной на любое число.

Ранг матрицы равен наибольшему, отличному от нуля, минору матрицы.

Если матрица элементарными преобразованиями приведена к ступенчатому виду, то ранг матрицы совпадает с числом ненулевых строк в ступенчатой матрице.

Метод Гаусса решения системы линейных уравнений:

1) привести матрицу к ступенчатому виду и найти ее ранг r;
2) выделить базисный минор, т. е. любой минор порядка r, отличный от нуля;
3) выбрать главные неизвестные, т. е. неизвестные, коэффициенты при которых входят в базисный минор;
4) остальные (свободные) неизвестные перенести в правую часть каждого из уравнений;
5) выразить главные неизвестные через свободные и записать общее решение.

Аксиомы линейного пространства L (здесь a, b, c, $\theta \in L$, α, $\beta \in R$):

1) $a + b = b + a$;
2) $(a + b) + c = a + (b + c)$;
3) $1 \cdot a = a$;
4) $\exists\, \theta$, в том числе $a + \theta = a$;
5) $\exists\, (-a)$, в том числе $a + (-a) = \theta$;
6) $\alpha \cdot (\beta \cdot a) = (\alpha\beta) \cdot a$;
7) $(\alpha + \beta) \cdot a = \alpha a + \beta a$;
8) $\alpha \cdot (a + b) = \alpha a + \alpha b$.

Линейной комбинацией элементов a_1, …, a_n линейного пространства L называется любой элемент этого же пространства вида $b=k_1a_1+k_2a_2+\ldots+k_na_n$, где k_1, …, $k_n \in R$.

Система элементов a_1, …, a_n линейного пространства L называется линейно независимой, если нулевому элементу θ равна только их линейная комбинация с нулевыми коэффициентами, т. е. из соотношения $\theta=k_1a_1+k_2a_2+\ldots+k_na_n$ обязательно следует, что $k_1=k_2=\ldots=k_n=0$.

Система элементов a_1, …, a_n линейного пространства L называется линейно зависимой, если существует линейная комбинация векторов с ненулевыми коэффициентами, равная нулевому элементу, т. е. $\exists\ k_j \neq 0$, такой что $\theta=$ $=k_1a_1+\ldots+k_ja_j+\ldots+k_na_n$.

Линейное пространство L имеет размерность n (т. е. является n-мерным), если в нем существует линейно независимая система из n элементов, а любая система из $n+1$ элемента линейно зависима.

Базисом линейного n-мерного пространства называется любая линейно независимая, упорядоченная система n векторов a_1, …, a_n. Если $b=k_1a_1+k_2a_2+\ldots+k_na_n$, то числа k_1, …, k_n называются координатами элемента b в данном базисе. Координаты определяются единственным образом.

Для установления линейной независимости векторов достаточно составить матрицу из координатных столбцов этих векторов и вычислить ее ранг. Если ранг равен числу векторов, то векторы линейно независимы, если меньше — зависимы.

Для установления линейной независимости функций достаточно вычислить определитель Вронского:

$$W=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Если он отличен от нуля, то система линейно независима.

Матрицей перехода $\mathbf{C}_{ef}$ от базиса e_1, …, e_n к базису f_1, …, f_n называется матрица, столбцами которой являются координатные столбцы векторов нового базиса $f_1, \ldots, f_n$ в старом базисе $e_1, \ldots, e_n$.

Если $a=x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_ne_n=y_1f_1+y_2f_2+\ldots+y_nf_n$, то

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{C}_{ef}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{C}_{ef} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ причем } \mathbf{C}_{fe} = \mathbf{C}_{ef}^{-1}.$$

Скалярным произведением (x, y) элементов (векторов) $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ линейного пространства L называется операция (а также результат этой операции), которая паре элементов ставит в соответствие единственное число $(x, y)=\alpha$ и подчиняется аксиомам:

1) $(y, x)=(x, y)$;

2) $((kx), y)=k(x, y)$, k — любое действительное число;

3) $(x, (x+z))=(x, z)+(y, z)$;

4) $\mathbf{x}^2=(x, x)\geq 0$, причем $\mathbf{x}^2=0 \Leftrightarrow \mathbf{x}=\theta$.

Базис $e_1, \ldots, e_n$ называется ортонормированным, если

$$(e_i, e_j)=\begin{cases} 1 \text{ при } i=j, \\ 0 \text{ при } i\neq j. \end{cases}$$

Скалярное произведение элементов (векторов) $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, заданных в ортонормированном базисе $e_1, \ldots, e_n$ своими координатами $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y}=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, вычисляется по формуле

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=(x, y)=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n.$$

Преобразование (оператор) $y=\varphi(x)$ пространства L называется линейным, если выполнены два условия:

1) $\varphi(\alpha x)=\alpha\varphi(x)$, $x\in L$, $\alpha\in R$;

2) $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$, $x, y\in L$.

Если преобразование (оператор) является линейным, то его матрица $\mathbf{A}$ в заданном ортонормированном базисе e_1, ..., e_n составляется из столбцов координат образов базисных векторов, т. е. если $\varphi(e_j)=a_{1j}\cdot e_1+a_{2j}\cdot e_2+\ldots+a_{nj}\cdot e_n$, то

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обратное преобразование (обратный оператор) имеет матрицу, обратную к матрице преобразования (оператора).

Собственным вектором линейного преобразования (оператора) $y=\varphi(x)$, отвечающим собственному значению (собственному числу) λ, называется ненулевой вектор $\mathbf{x}$, заданный условием $\varphi(x)=\lambda\cdot x$.

Метод отыскания собственных векторов линейного преобразования (оператора) с матрицей $\mathbf{A}$:

1. Составить характеристическое уравнение $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|=0$ и найти его корни, которые и являются собственными числами.

   Характеристическое уравнение для оператора в трехмерном пространстве имеет вид:

$$\begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & (a_{33}-\lambda) \end{vmatrix}=0.$$

2. Для каждого найденного собственного числа λ найти общий вид собственных векторов, являющихся решениями матричного уравнения $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\cdot\mathbf{x}=\theta$.

   В трехмерном пространстве — общим решением системы линейных уравнений

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0, \\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+a_{23}x_3=0, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+(a_{33}-\lambda)x_3=0. \end{cases}$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Пределы и производные

Определение предела:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$: если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$, в том числе для $\forall x$, удовлетворяющего условию $0<|x-x_0|<\delta$, выполняется условие $|f(x)-A|<\varepsilon$;
2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$: если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$, в том числе для $\forall x$, удовлетворяющего условию $0<|x-x_0|<\delta$, выполняется условие $f(x)>\varepsilon$;
3) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=A$: если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$, в том числе для $\forall x$, удовлетворяющего условию $x>\delta$, выполняется условие $|f(x)-A|<\varepsilon$;
4) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$: если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$, в том числе для $\forall x$, удовлетворяющего условию $x>\delta$, выполняется условие $f(x)>\varepsilon$.

Замечательные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций (при $\alpha\to 0$)

$\sin\alpha\sim\alpha$	$a^\alpha-1\sim\alpha\ln a$
$\arcsin\alpha\sim\alpha$	$\ln(1+\alpha)\sim\alpha$
$\mathrm{tg}\alpha\sim\alpha$	$(1+\alpha)^n-1\sim n\alpha$
$\mathrm{agctg}\alpha\sim\alpha$	$\sqrt[n]{1+\alpha}-1\sim\frac{\alpha}{n}$
$1-\cos\alpha\sim\frac{\alpha^2}{2}$	$e_\alpha-1\sim\alpha$

Правила действия с конечными пределами при $x\to a$ или $x\to\infty$.

Пусть $A=\lim f(x)$, $B=\lim g(x)$, $C=\mathrm{const}$, тогда:

1) $\lim[C]=C$;
2) $\lim[Cf(x)]=CA$;

3) $\lim[f(x)+g(x)]=A+B$;

4) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=AB$;

5) при $B\neq 0$ $\lim\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{A}{B}$.

Правила дифференцирования ($C\in R$), $y=f(x)$, $dy=f'(x)dx$:

$$(C)'=0,\ dC=0;$$

$$(Cy)'=Cy',\ d(Cy)=Cdy;$$

$$[y(u(x))]'=y'_u\cdot u'(x),\ \ d[y(u(x))]=y'_u\cdot u'(x)dx=y'_u\cdot du;$$

$$(u\pm v)'=u'\pm v',\ d(u\pm v)=du\pm dv;$$

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v',\ d(u\cdot v)=vdu+udv;$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2},\ \ d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\cdot du-u\cdot dv}{v^2}.$$

Таблица производных

$(x^n)'=nx^{n-1}$	$(\operatorname{tg}x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\operatorname{ctg}x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$	$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(e^x)'=e^x$	$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(a^x)'=a^x\ln a$	$(\operatorname{arctg}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$
$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	$(\operatorname{arcctg}x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$
$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$	$(\operatorname{sh}x)'=\operatorname{ch}x$
$(\sin x)'=\cos x$	$(\operatorname{ch}x)'=\operatorname{sh}x$
$(\cos x)'=-\sin x$	$(\operatorname{th}x)'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$(\operatorname{cth}x)'=-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	

Уравнения касательной и нормали к графику функции $y=f(x)$ в точке $M\,(x_0,\,y_0)$:

- касательная

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0);$$

- нормаль

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

Дифференцируемость функции:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \alpha(x) \cdot (x - x_0),$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$.

Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Если $f(x)$ и $g(x)$ две дифференцируемые бесконечно малые или две дифференцируемые бесконечно большие функции при $x \to x_0$ или при $x \to \infty$ и существует конечный либо бесконечный предел $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Асимптоты графика функции:

1) если хотя бы один из односторонних пределов функции $y = f(x)$ в точке x_0 бесконечен, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = \infty$, то прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой графика функции;
2) если для функции $y = f(x)$ существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - kx\right] = b$, то прямая $y = kx + b$ является наклонной (горизонтальной при $k = 0$) асимптотой графика функции.

Исследование функции с помощью первой производной:

1. Если на интервале (a, b) $y' > 0$, то $y = f(x)$ возрастает на этом интервале ($y' < 0$, соответственно, убывает).
2. Пусть $y = f(x)$ определена в точке x_0, а производная в этой точке либо равна нулю, либо бесконечна, либо не существует, то в этой точке $y = f(x)$ может иметь экстремум (максимум или минимум). (*Необходимое условие экстремума*.)

3. Пусть в точке x_0 выполнено необходимое условие экстремума, слева от точки x_0 производная положительна, а справа — отрицательна, то функция $y=f(x)$ имеет в этой точке максимум. (*Необходимое условие максимума*.)
4. Пусть в точке x_0 выполнено необходимое условие экстремума, слева от точки x_0 производная отрицательна, а справа — положительна, то функция $y=f(x)$ имеет в этой точке минимум. (*Необходимое условие минимума*.)

Исследование функции с помощью второй производной:

1. Если $y''<0$ на (a, b), то на этом интервале график функции $y=f(x)$ выпуклый вверх (при $y''>0$, соответственно, выпуклый вниз).
2. Пусть $y=f(x)$ определена в точке x_0, а слева и справа от точки x_0 график $y=f(x)$ имеет разные направления выпуклости (y'' имеет разные знаки), то точка $(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции.

Свойства производных высших порядков:

$$f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)', \quad \frac{d^n f(x)}{dx^n}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}f(x)}{dx^{n-1}}\right).$$

$$(Cu)^{(n)}=Cu^{(n)}, \text{ где } C=\text{const};$$

$$(u \pm v)^{(n)}=u^{(n)} \pm v^{(n)}.$$

Формула Лейбница:

$$(u\cdot v)^{(n)}=\sum_{k=0}^{k} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

Формула Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$
$$+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x_0;x).$$

Формула Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r_n(x).$$

Остаточный член в форме Пеано:

$$r_n(x_0;x)=o\big((x-x_0)^n\big).$$

Остаточный член в форме Лагранжа:

$$r_n(x_0;\ x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ \text{где}\ \ c=x_0+\theta(x-x_0)\ \ (0<\theta<1).$$

Стандартные разложения:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n);$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2});$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^2 x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1});$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+o(x^n);$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{n}x^k+o(x^n);$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!}+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3}{3!}+\ldots+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)x^n}{n!}+o(x^n).$$

Функции нескольких переменных

1. Для функции двух переменных $z=f(x,\ y)$ частной производной по x называется

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,\ y)-f(x,\ y)}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial x}=z'_x=z_x,$$

т. е. при дифференцировании по x переменную y считаем постоянной.

2. Первый дифференциал:

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

3. Для функции трех переменных $u=f(x, y, z)$ первый дифференциал

$$du=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

4. Для функции трех переменных $u=f(x, y, z)$ производной по направлению единичного вектора $\vec{n}=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ называется

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

5. Для функции трех переменных $u=f(x, y, z)$ вектор

$$\left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}=\operatorname{grad}u=\nabla u$$

называется градиентом функции.

Производные и дифференциалы второго порядка:

$$f_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right);$$

$$f_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{yx},\ f_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right);$$

$$d^2f=f_{xx}(dx)^2+2f_{xy}dxdy+f_{yy}(dy)^2.$$

Исследование на экстремум функции двух переменных $z=f(x, y)$:

1. Найти стационарные точки функции, решив систему уравнений

$$\begin{cases} z_x=0, \\ z_y=0. \end{cases}$$

(Необходимое условие экстремума.)

2. В каждой точке M, где выполнено необходимое условие, вычислить

$$A(M)=z_{xx}(M),\ B(M)=z_{xy}(M),\ C(M)=z_{yy}(M).$$

Если $AC-B^2>0$, в точке есть экстремум, причем максимум при $A<0$ и минимум $A>0$.

Если $AC-B^2<0$, в точке нет экстремума.

Если $AC-B^2=0$, то требуется дополнительное исследование знака второго дифференциала.

Функции, заданные неявно: при определенных условиях уравнение $F(x, y)=0$ задает неявно функцию $y=f(x)$. Ее производная может быть вычислена по формуле

$$y'=-\frac{F_x}{F_y}.$$

Аналогично уравнение $F(x, y, z)=0$ может задавать неявно функцию двух переменных $z=f(x, y)$. Ее частные производные вычисляются по формулам:

$$z_x=-\frac{F_x}{F_z}, \quad z_y=-\frac{F_y}{F_z}.$$

Интегралы

Таблица неопределенных интегралов

$\int 0\,dx=C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\operatorname{tg} x+C$
$\int 1\,dx=x+C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx=-\operatorname{ctg} x+C$
$\int x^a dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+C \quad (a\neq -1)$	$\int \operatorname{ch} x\,dx=\operatorname{sh} x+C$
$\int \frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+C$	$\int \operatorname{sh} x\,dx=\operatorname{ch} x+C$
$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C=-\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\tilde{C}$ $\int \frac{1}{x^2+1}dx=\operatorname{arctg} x+C=-\operatorname{arctg} x+\tilde{C}$	$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}dx=\operatorname{th} x+C$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+C=-\arccos\frac{x}{a}+\tilde{C}$ $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C=-\arccos x+\tilde{C}$	$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}dx=-\operatorname{cth} x+C$
$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$ $\int e^x dx=e^x+C$	$\int e^{ax}\cos bx\,dx=$ $=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx+a\cos bx)+C$
$\int \cos x\,dx=\sin x+C$	$\int e^{ax}\sin bx\,dx=$ $=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C$

$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - q}} dx = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 + q}\right\| + C$
$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + C$	

Формула Ньютона — Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b, \text{ если } F'(x) = f(x).$$

Замена переменной и интегрирование по частям:

$$\int f(x)dx = \begin{bmatrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{bmatrix} = \left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)};$$

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{bmatrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \\ \alpha = \varphi^{-1}(a) \\ \beta = \varphi^{-1}(b) \end{bmatrix} = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt;$$

$$\int u dv = uv - \int v du;$$

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v du.$$

Несобственные интегралы с бесконечным верхним пределом:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Если этот предел конечен, то говорят, что интеграл сходится.

Ряды

Ряды — это суммы с бесконечным числом слагаемых.

Если все слагаемые являются числами, то это — числовой ряд; если все слагаемые являются функциями, то это — функциональный ряд:

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Частичная сумма ряда:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Остаток ряда:

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то говорят, что ряд сходится, а его сумма равна S, что ряд расходится.

Необходимое условие сходимости: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Исследование на сходимость рядов с положительными членами:

а) I теорема сравнения (мажорантный признак).

Пусть $\forall n$ выполнено $a_n \geq b_n \geq 0$.

Тогда из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, а из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;

б) II теорема сравнения (предельный признак).

Пусть $\forall n$ выполнено $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, причем $c \neq 0$ и $c \neq \infty$.

Тогда ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ведут себя одинаково: или оба ряда сходятся, или оба ряда расходятся.

Интегральный признак Коши: если $f(x)$ такова, что $f(x) \geq 0$ при $x \geq 1$ и $\forall n$ $f(n) = a_n$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ ведут себя одинаково: или оба ряда сходятся, или оба ряда расходятся.

Признак Даламбера и признак Коши. Вычисляем $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$ (признак Даламбера) или $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$ (признак Коши).

Если $q<1$, то ряд сходится; если $q>1$, то ряд расходится. При $q=1$ признаки ответа не дают.

Формула Стирлинга: $n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ при $n\to\infty$.

Знакочередующиеся ряды. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$, где $a_n>0$.

Теорема Лейбница. Пусть выполнены два условия:
1) a_n монотонно убывает с ростом n;
2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ сходится и справедлива оценка остатка ряда $|R_n|\le a_n$.

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ сходится абсолютно (а поэтому сходится), если сходится ряд из модулей его членов, т. е. знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ сходится.

Степенные ряды. Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ сходится на интервале $(x_0-R,\ x_0+R)$, где R — радиус сходимости, который можно вычислить по формулам Коши — Адамара:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}.$$

При этом $0\le R\le\infty$.

Сходимость ряда в граничных точках проверяют отдельно.

На интервале сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать и почленно интегрировать.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

$$\cos x = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{n} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}, \quad -1 < x \le 1.$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + \ldots, \quad |x| < 1.$$

Тригонометрический ряд Фурье. Функциональный ряд вида

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx),$$

где

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx,$$

называется *тригонометрическим рядом Фурье* на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Для четной функции $f(x)$ ряд Фурье имеет вид

$$\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos nx,$$

где $\alpha_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx$, $\alpha_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx dx$, для нечетной функции —

$$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\sin nx,$$

где $\beta_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx dx.$

Теорема Дирихле. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(x)$ имеет на интервале $(-\pi, \pi)$ конечное число точек разрыва первого рода;
2) $f(x)$ имеет конечный правосторонний предел в точке $x=-\pi$ и конечный левосторонний предел в точке $x=\pi$;
3) $[-\pi, \pi]$ можно разбить на конечное число частей, внутри каждой из которой $f(x)$ изменяется монотонно.

Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится на отрезке $[-\pi, \pi]$, причем его сумма равна:

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2},\quad x\in(-\pi,\ \pi);$$
$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2},\quad x=-\pi,\ x=\pi.$$

Сумма ряда Фурье совпадает с функцией $f(x)$ всюду, где $f(x)$ непрерывна.

Функциональный ряд вида

$$f(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos\frac{\pi nx}{l}+\beta_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right),$$

где

$$\alpha_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,\ \alpha_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx\,\beta_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx$$

называется тригонометрическим рядом Фурье на отрезке $[-l; l]$.

Кратные интегралы

Переход в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$:

1) к полярным координатам ρ, φ $(0 \le \rho < \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi$ или $-\pi \le \varphi < \pi)$

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ dxdy = \rho d\rho d\varphi;$$

2) к обобщенным полярным координатам ρ, φ $(0 \le \rho < \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi$ или $-\pi \le \varphi < \pi)$

$$x = a\rho\cos\varphi,\ y = b\rho\sin\varphi,\ dxdy = ab\rho d\rho d\varphi.$$

Переход в тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz$:

1) к цилиндрическим координатам ρ, φ, z $(0 \le \rho < \infty,\ -\infty < z < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi$ или $-\pi \le \varphi < \pi)$

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z,\ dxdydz = \rho d\rho d\varphi dz;$$

2) к сферическим координатам r, φ, θ $(0 \le r < \infty,\ 0 \le \theta < \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi$ или $-\pi \le \varphi < \pi)$

$$x = r\cos\varphi\sin\theta,\ y = r\sin\varphi\sin\theta,\ z = r\cos\theta,\ dxdydz = r^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Векторный анализ

Если $u = f(x, y, z)$ и $\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$, то

- градиент скалярного поля

$$\mathrm{grad}\,u = \nabla f = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k};$$

- дивергенция векторного поля

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z};$$

- ротор векторного поля

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Формула Остроградского:

$$\oiint\limits_S (\vec{a},\ \vec{n})d\sigma = \iiint\limits_V div\vec{a}dxdydz,$$

где S — замкнутая поверхность, ограничивающая объем V; $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S.

Формула Стокса:

$$\oint\limits_\Gamma \left(\vec{a},\ \overrightarrow{dr}\right) = \iint\limits_S (rot\vec{a},\ \vec{n})d\sigma,$$

где Г — замкнутая линия, являющаяся краем поверхности S; $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности S (согласуется с направлением интегрирования по Г).

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Дифференциальные уравнения первого порядка могут иметь вид:

$$F(x,\ y,\ y') = 0;\ y' = f(x,\ y);\ P(x,\ y)dx + Q(x,\ y)dy = 0.$$

Здесь x — независимая переменная, $y(x)$ — функция, либо, наоборот, y — независимая переменная, $x(y)$ — функция.

Если к уравнению добавлено начальное условие $y(x_0) = y_0$, то говорят, что задана задача Коши.

1. $y' = f_1(x)f_2(x)$ — уравнение с разделяющимися переменными.

Метод решения:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx.$$

2. $y' = f\left(\frac{x}{y}\right)$ — однородное уравнение.

Метод решения: замена $\frac{y}{x} = u$, тогда $u'(x)x + u(x) = f(u)$ является уравнением с разделяющимися переменными $\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$.

3. $y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$ — уравнение Бернулли, которое при $\alpha = 0$ является линейным уравнением.

Метод решения (метод Бернулли): ищем решение в виде $y = uv$, т. е. $u'v + uv' + p(x)uv = q(x)(uv)^{\alpha}$. Выбираем функцию v так, что $v' + pv = 0$ (уравнение с разделяющимися переменными), тогда останется уравнение с разделяющимися переменными $u'v = q(x)(uv)^{\alpha}$, из которого найдем u.

Понижение порядка дифференциального уравнения:

1) $y^{(n)} = f(x)$.

Метод решения: последовательное интегрирование;

2) $F(x, y', y'') = 0$.

Метод решения: замена $y' = z(x)$, $y'' = z'(x)$ приводит к уравнению $F(x, z, z') = 0$ первого порядка;

3) $F(y, y', y'') = 0$.

Метод решения: замена $y' = p(y)$, $y'' = p\frac{dp}{dy}$ приводит к уравнению $F\left(y, p, \frac{dp}{dy}\right) = 0$ первого порядка.

Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x),$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ — числа.

Фундаментальная система решений ФСР — это любой набор n $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ линейно независимых решений уравнения

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0.$$

Для построения ФСР запишем характеристическое уравнение

$$\lambda^n + a^{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda^1 + a_0 = 0$$

и найдем его корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

1. Если λ — действительный однократный корень, то в ФСР ему соответствует $y = e^{\lambda x}$.
2. Если λ — действительный корень кратности k, то в ФСР ему соответствует набор $y_1 = e^{\lambda x}$, $y_2 = xe^{\lambda x}$, $y_3 = x^2 e^{\lambda x}$, …, $y_k = x^{k-1}e^{\lambda x}$.
3. Если $\lambda = \alpha \pm i\beta$ — пара комплексно сопряженных однократных корней, то в ФСР им соответствуют две функции: $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$.
4. Если $\lambda = \alpha \pm i\beta$ — пара комплексно сопряженных двукратных корней, то в ФСР им соответствуют четыре функции: $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$, $y_3 = xe^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_4 = xe^{\alpha x}\sin\beta x$.

При $f(x) \equiv 0$ общее решение имеет вид:

$$y^{\infty} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x).$$

При $f(x) \neq 0$ общее решение имеет вид:

$$y_{\text{он}} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) + y_{\text{чн}}.$$

Здесь $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — ФСР; $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные; $y_{\text{чн}}$ — некоторое частное решение неоднородного ($f(x) \neq 0$) уравнения.

Если $f(x)$ имеет специальный вид:

$$f(x) = e^{\alpha x}\{P_p(x)\cos\beta x + Q_p(x)\cos\beta x\},$$

где $P_p(x)$ и $Q_p(x)$ — многочлены степеней p и q соответственно, то частное решение $y_{\text{чн}}$ можно подобрать в виде:

$$y_{\text{чн}} = x^{k+1} e^{\alpha x}\left\{\tilde{P}_m(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_m(x)\cos\beta x\right\},$$

где $m = \max\{p, q\}$, $\tilde{P}_m(x)$ и $\tilde{Q}_m(x)$ — многочлены с неопределенными коэффициентами, $k \geq 0$ — кратность корня характеристического уравнения, совпадающего с числом $\alpha + i\beta$. Неопределенные коэффициенты находят, подставляя $y_{\text{чн}}$ в неоднородное уравнение.

Если $f(x)$ имеет общий вид, то для поиска общего решения применяют метод вариации.

При $n=2$ имеем

$$y_{\text{он}}=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x),$$

где y_1, y_2 — фундаментальные решения, а функции $C_1(x)$, $C_2(x)$ находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2=0, \\ C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'=f(x). \end{cases}$$

ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Дано дифференциальное уравнение $x'=f(x, t)$.

Решение $\varphi(t)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0)=\varphi_0$, называется *устойчивым по Ляпунову* при $t \to \infty$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для всякого решения $x(t)$ этой же системы, начальное значение которого удовлетворяет условию $|x(t_0)-\varphi_0|<\delta$, имеет место неравенство $|x(t)-\varphi(t)|<\varepsilon$ для всех $t\geq t_0$.

Если кроме того выполняется условие $\lim\limits_{t\to\infty}|x(t)-\varphi(t)|=$ $=0$, то решение $x(t)$ называется *асимптотически устойчивым*.

Асимптотически устойчивое решение является устойчивым (по Ляпунову), но не наоборот.

Если решение $x(t)$ не является устойчивым, то оно называется *неустойчивым*.

Дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k}{dt}=f_k(x_1,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t),\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Решение $\vec{\varphi}(t)=(\varphi_1 t),\ \ldots,\ \varphi_n(t))$ этой системы, удовлетворяющее начальным условиям $\varphi_k(t_0)=\varphi_{k0}$, $k=1,\ 2,\ \ldots,$ n, называется *устойчивым по Ляпунову* при $t\to\infty$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для всякого решения $\vec{x}(t)=(x_1 t),\ \ldots,\ x_n(t))$ этой же системы, начальные значения которого удовлетворяют условиям $|x_k(t_0)-\varphi_{k0}|<\delta$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, имеют место неравенства $|x_k(t)-\varphi_k(t)|<\varepsilon$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ для всех $t\geq t_0$.

Если кроме того выполняются условия

$$\lim_{t\to+\infty}\left|x_k(t)-\varphi_k(t)\right|=0,\ k=1,\,2,\,\ldots,\,n,$$

то решение $\vec{x}(t)$ называется *асимптотически устойчивым*.

Асимптотически устойчивое решение является устойчивым (по Ляпунову), но не наоборот.

Если решение $x_k(t)$ не является устойчивым, то оно называется *неустойчивым*.

Координаты всех точек покоя системы

$$\begin{cases} x'=f(x,\ y),\\ y'=g(x,\ y)\end{cases}$$

удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} f(x,\ y)=0,\\ g(x,\ y)=0.\end{cases}$$

Линейная автономная система

$$\begin{cases} x'=a_{11}x+a_{12}y,\\ y'=a_{21}x+a_{22}y\end{cases}$$

имеет единственную точку покоя: $x(t)\equiv 0$, $y(t)\equiv 0$ при всех $0<t<+\infty$.

Собственные значения λ_1 и λ_2 матрицы системы являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

- Если λ_1 и λ_2 — действительные отрицательные числа, то точка покоя устойчива и называется *устойчивым узлом*.
- Если λ_1 и λ_2 — действительные положительные числа, то точка покоя неустойчива и называется *неустойчивым узлом*.

- Если λ_1 и λ_2 — действительные числа, имеющие разные знаки, то точка покоя неустойчива и называется *седлом*.
- Если λ_1 и λ_2 — комплексные числа, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta$ и $\alpha \leq 0$, то точка покоя устойчива, при $\alpha = 0$ точка устойчива, но не асимптотически устойчива и называется *центром*, при $\alpha < 0$ она асимптотически устойчива и называется *устойчивым фокусом*; при $\alpha > 0$ точка покоя неустойчива и называется *неустойчивым фокусом*.
- Если $\lambda_1 = \lambda_2$ — отличные от нуля действительные числа, то точка покоя — *узел* специального вида, называемый *диакритическим*, устойчивым при отрицательных $\lambda_1 = \lambda_2$ и неустойчивым при положительных $\lambda_1 = \lambda_2$.
- Если $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 \neq 0$, то существует прямая, проходящая через начало координат, все точки которой являются точками покоя.
- Если $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то все точки плоскости являются устойчивыми точками покоя.

Системой первого (линейного) приближения для системы

$$\begin{cases} x' = f(x,\ y), \\ y' = g(x,\ y) \end{cases}$$

в окрестности ее точки покоя $O(0,\ 0)$ является

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases}$$

если в некоторой окрестности этой точки справедливы следующие разложения в степенной ряд (ряд Тейлора):

$$\begin{cases} f(x,\ y) = a_{11}x + a_{12}y + b_{11}x^2 + b_{12}xy + b_{13}y^2 + \ldots \\ g(x,\ y) = a_{21}x + a_{22}y + b_{21}x^2 + b_{22}xy + b_{23}y^2 + \ldots \end{cases}$$

Если оба собственных значения системы первого приближения имеют ненулевые действительные части, тогда:

- если точка покоя $O(0,\ 0)$ системы первого приближения устойчива, то и точка покоя $O(0,\ 0)$ исходной нелинейной системы тоже устойчива;
- если точка покоя $O(0,\ 0)$ системы первого приближения неустойчива, то и точка покоя $O(0,\ 0)$ исходной нелинейной системы тоже неустойчива.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Комплексное число:

$$z = x + iy;\ z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi);\ z = re^{i\varphi};$$

$$\mathrm{Re}\,z = x,\ \mathrm{Im}\,z = y,\ z = x - iy,\ z = re^{-i\varphi},$$

где

$$i^2 = -1,\quad r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x} & \text{при}\ \ x > 0, \\ \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x} + \pi & \text{при}\ \ x < 0,\ y > 0, \\ \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x} - \pi & \text{при}\ \ x < 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Для $w = f(z)$ выполнено $w = u(x,\ y) + iv(x,\ y)$; $\mathrm{Re}\,f = u(x,\ y)$, $\mathrm{Im}\,f = v(x,\ y)$.

Действия:

$$z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\,z = 0, \\ \mathrm{Im}\,z = 0; \end{cases}$$

$$z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}\,z;\ z - \overline{z} = 2\mathrm{Im}\,z,\ z \cdot \overline{z} = |z|^2;$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2);$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2},\quad \frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{|z_2|^2}.$$

Функции:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ (n-1);$$

$$e^z=\exp(z)=e^x(\cos y+i\sin y);$$

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\ \ \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\ \ \operatorname{tg} z=i\cdot\frac{e^{-iz}-e^{iz}}{e^{iz}+e^{-iz}};$$

$$\operatorname{ch} z=\frac{e^z+e^{-z}}{2},\ \ \operatorname{sh} z=\frac{e^z-e^{-z}}{2};$$

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z;\ \operatorname{Ln} z=\ln|z|+i\arg z+2\pi ki,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots;$$

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2\pi ki,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

Условия Коши — Римана (необходимое и достаточное условие аналитичности):

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

при этом

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\ \text{ и }\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0,\ \ \forall(x,\ y)\in R^2.$$

Ряд Тейлора:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-a)^n,\ \text{ где } c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

в частности,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n z^n,\ \text{ где } c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!};$$

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\ldots+z^n+\ldots\ \text{ при } |z|<1;$$

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots\ \text{ при } \forall z;$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots\ \text{ при } \forall z;$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \text{ при } \forall z;$$

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} \ldots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots \text{ при } \forall z;$$

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} \ldots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \text{ при } \forall z;$$

$$\ln z = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} + \ldots \text{ при } |z| < 1;$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)z^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)z^n}{n!} + \ldots$$
$$\text{при } |z| < 1;$$

Ряд Лорана

Теорема Лорана (о разложении функции в ряд по целым степеням). Функция $f(z)$, аналитическая в кольце $r < |z-a| < R$, $r \geq 0$, $R \leq \infty$, представляется в этом кольце сходящимся рядом по целым степеням, т. е. имеет место равенство

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n = \ldots + \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + \ldots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} +$$
$$+ \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots$$

Коэффициенты ряда вычисляются по формуле

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где γ — произвольный контур, принадлежащий кольцу и охватывающий точку a; в частности, γ — окружность $|z-a| = \rho$, где $r < \rho < R$.

В частности при $a = 0$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n = \ldots + \frac{c_{-k}}{z^k} + \ldots + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots,$$

где $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_\gamma \dfrac{f(z)}{z^{n+1}} dz$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Вычет в особой точке a — это число $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = c_{-1}$, или

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)dz.$$

Вычет в полюсе n-го порядка:

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-a)^n f(z)\right].$$

Вычет в простом полюсе порядка $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a}\left[(z-a)f(z)\right]$, если $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причем $\varphi(a)=0$, $\varphi'(a)\neq 0$ и $\psi(a)\neq 0$, то $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \dfrac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$.

Интегрирование аналитической функции $f(z)$:

а) замкнутый контур γ: $\oint_{\gamma} f(z)dz = 0$;

б) контур γ начинается в точке z_1 и заканчивается в точке z_2:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1) = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2},$$

где $F(z)$ — первообразная (формула Ньютона — Лейбница).

Интегрирование неаналитической функции $f(z)$:

а) замкнутый контур γ: $\oint_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i\sum \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z)$, суммирование проводится только по особым точкам внутри контура (теорема Коши о вычетах);

б) контур γ с параметризацией $z(t)=x(t)=iy(t)$ начинается в точке $z_1=x(t_1)+iy(t_1)$ и заканчивается в точке $z_2=x(t_2)+iy(t_2)$:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} f\big(x(t)+iy(t)\big)\big(x'(t)+y'(t)\big)dt;$$

в) контур γ с параметризацией $z(t)=re^{i\varphi}$ начинается в точке $z_1=r\cdot e^{i\varphi_1}$ и заканчивается в точке $z_2=r\cdot e^{i\varphi_2}$:

$$\int_\gamma f(z)dz=ir\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f\left(re^{i\varphi}\right)e^{i\varphi}dt.$$

Вычисление интегралов от действительных функций:

1. Пусть $R(x)$ — рациональная функция, $R(x)=\dfrac{P_k(x)}{Q_n(x)}$, где $P_k(x)$ и $Q_n(x)$ — многочлены степени k и n соответственно. Если функция $R(x)$ непрерывна на всей действительной оси и $n\geq k+2$ (т. е. степень знаменателя, по крайней мере, на две единицы больше степени числителя), то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx=2\pi i\cdot R_+,$$

где R_+ означает сумму вычетов функции $R(z)=\dfrac{P_k(z)}{Q_n(z)}$ по всем полюсам, расположенным в верхней полуплоскости.

2. Пусть $R(x)$ — рациональная функция, $R(x)=\dfrac{P_k(x)}{Q_n(x)}$, где $P_k(x)$ и $Q_n(x)$ — многочлены степени k и n соответственно. Если функция $R(x)$ непрерывна на всей действительной оси, $n\geq k+1$, λ — произвольное действительное число, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos\lambda x dx=\mathrm{Re}\left\{2\pi i\cdot E_+\right\};$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin\lambda x dx=\mathrm{Im}\left\{2\pi i\cdot E_+\right\},$$

где E_+ означает сумму вычетов функции $R(z)e^{i\lambda z}$ по всем полюсам, расположенным в верхней полуплоскости.

3. Пусть R — рациональная функция аргументов $\sin x$ и $\cos x$, $x\in[0,\,2\pi]$ и функция R непрерывна на отрезке, тогда

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x,\ \sin x)dx = \oint_{|z|=1} \frac{1}{iz}\cdot R\left(\frac{z^2+1}{2z},\ \frac{z^2-1}{2iz}\right)dz = 2\pi i\cdot R_0,$$

где R_0 — сумма вычетов функции $F(z)$ относительно полюсов, заключенных внутри окружности $|z|=1$. Здесь

$z=e^{ix},\ dx=\dfrac{dz}{iz},\ \cos x=\dfrac{z^2+1}{2z},\ \sin x=\dfrac{z^2-1}{2iz},\ |z|=1.$

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Функция-оригинал $f(t)$ должна удовлетворять условиям:

1) $f(t)=0$ при $t<0$;

2) $f(t)$ интегрируема на любом отрезке при $t\geq 0$;

3) $|f(t)|\leq Me^{st}$ при всех $t\geq 0$ и некоторых s и $M>0$.

Функция-изображение для каждого комплексного числа p задается равенством

$$F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} p>s.$$

Свойства оригиналов и изображений:

- линейность

$$\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)\leftrightarrow \alpha F_1(p)+\beta F_2(p);$$

- теорема подобия

$$f(\omega t)\leftrightarrow \frac{1}{\omega}F\left(\frac{p}{\omega}\right);$$

- теорема смещения

$$f(t)e^{-\lambda t}\leftrightarrow F(p+\lambda);$$

- теорема запаздывания

$$f(t-\tau)\leftrightarrow e^{-p\tau}F(p);$$

- теорема интегрирования оригинала

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(p)}{p};$$

- теорема интегрирования изображения

$$\int_{p}^{\infty} F(p)dp \leftrightarrow \frac{f(t)}{t};$$

- теорема дифференцирования оригинала

$$f'(t) \leftrightarrow pF(p) - f(0);$$

$$f''(t) \leftrightarrow p^2F(p) - pf(0) - f'(0);$$

$$f'''(t) \leftrightarrow p^3F(p) - p^2f(0) - pf'(0) - f''(0)$$

и т. п.;

- теорема дифференцирования изображения

$$F'(p) \leftrightarrow -tf(t);$$

- теорема умножения изображений

$$F_1(p) \cdot F_2(p) \leftrightarrow \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau.$$

$f(t)$	$F(p)$	$f(t)$	$F(p)$
$\delta(t)$	1	e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
1	$\frac{1}{p}$	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

«Принцип практической невозможности маловероятных событий»: *если случайное событие имеет очень малую вероятность, то практически можно считать, что в единичном испытании это событие не наступит.*

Следствие: *если случайное событие имеет вероятность, очень близкую к единице, то практически можно считать, что в единичном испытании это событие наступит.*

Достаточно малую вероятность, при которой (в данной определенной задаче) событие можно считать практически невозможным, называют *уровнем значимости*. На практике обычно принимают уровни значимости, заключенные между 0,01 и 0,05.

При $1 \le k \le n$:

- число размещений из n элементов по k равно
$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1);$$
- число перестановок из n элементов равно $P_n = n! = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$;
- число сочетаний из n элементов по k равно
$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k(k-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1};$$
- число размещений с повторениями из n элементов по k равно $\tilde{A}_n^k = n^k$;
- число сочетаний с повторениями из n элементов по k равно
$$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!} = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdot\ldots\cdot n}{k(k-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1};$$
- число перестановок с повторениями из n элементов, среди которых только k различных элементов, если первый элемент входит n_1 раз, второй — n_2 раз, k-й n_k раз $(n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k)$, равно
$$\tilde{P}_n\left(n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k\right) = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}.$$

Правило суммы. Если некоторый объект A может быть выбран из множества объектов k способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то выбрать либо A, либо B можно $k+n$ способами.

Правило произведения. Если объект A можно выбрать из множества объектов k способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пара объектов (A, B) в указанном порядке может быть выбрана $k\cdot n$ способами.

Определение вероятности события:

- классическое $P(A) = \dfrac{m}{n}$ (n — число всех исходов; m — число исходов, благоприятствующих событию A);

- геометрическое $P(A)=\frac{S_A}{S}=\frac{V_A}{V}=\frac{\mathrm{mes}(A)}{\mathrm{mes}(\Omega)}$;

- статистическое $P(A)=\lim\limits_{n\xrightarrow{P}\infty}\frac{m_n}{n}\approx\frac{m_n}{n}$ (m_n — число наступления события A в n проведенных опытах);
- аксиоматическое:
  — аксиома неотрицательности $P(A)\geq 0$;
  — аксиома нормированности $P(\Omega)=1$;
  — аксиома аддитивности $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$, если $A\cap B=\varnothing$;
- следствия из аксиом:

$$0\leq P(A)\leq 1;$$

$$P(\varnothing)=0;$$

$$P(\bar{A})=1-P(A);$$

$$P(A)\leq P(B) \text{ при } A\subseteq B.$$

Формула сложения вероятностей:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B);$$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-$$
$$-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C);$$

$$P(A\cup B)\leq P(A)+P(B).$$

Вероятность события A при условии, что событие B произошло (условная вероятность):

$$P(A/B)=P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Если события A и B независимы, то $P(A/B)=P(A)$ и $P(B/A)=P(B)$.

Формула умножения вероятностей:

- для двух зависимых событий

$$P(A\cap B)=P(B)\cdot P_B(A)=P(A)\cdot P_A(B)=P(B)\cdot P(A/B)=P(A)\cdot P(B/A);$$

- для двух независимых событий

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B);$$

- для трех зависимых событий

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/A \cap B);$$

- для трех независимых событий

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Формула полной вероятности (если $P(H_i) \cap P(H_j) = \varnothing$ для всех i и j и $A \subseteq H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n$):

$$P(A) = P(A/H_1) \cdot P(H_1) + P(A/H_2) \cdot P(H_2) + \ldots + P(A/H_n) \cdot P(H_n).$$

Формула Байеса (для любого k, $P(H_k)$ — априорные вероятности, $P(H_k/A)$ — апостериорные вероятности):

$$P(H_k / A) = \frac{P(A / H_k) \cdot P(H_k)}{P(A)} = \frac{P(A / H_k) \cdot P(H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A / H_i) \cdot P(H_i)}.$$

Формула Бернулли для биномиальной схемы ($k = 0, 1, \ldots, n$):

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \text{ где } q = 1 - p.$$

Наивероятнейшее число k^* успехов в серии из n испытаний Бернулли удовлетворяет неравенству $np - q \le k^* \le np + p$.

При $n \to \infty$ так, что $np \to \lambda = \text{const}$ (n — несколько десятков и более, $np > 10$)

$$P_n(k) \approx P(k) = \frac{(np)^k}{k!} e^{-np} \quad \text{(формула Пуассона).}$$

При $n \to \infty$ так, что $np \ge 10$ (n — несколько десятков и более)

$$P_n(k) \approx P(k) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}},$$

где $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$ и $\varphi(x)$ — дифференциальная функция Лапласа — Гаусса, заданная таблицей (формула Лапласа).

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}; \; x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}},$$

$\Phi(x)$ — интегральная функция Лапласа — Гаусса, заданная таблицей, причем $\Phi(-x)=-\Phi(x)$.

Полиномиальная схема:

$$P_n(k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_m)=\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_m^{k_m}$$

($m>2$ исходов с вероятностями $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_m$ соответственно, $p_1+p_2+\ldots+p_m=1,\ k_1+k_2+\ldots+k_m=n$).

Интенсивностью потока λ называют среднее число событий, которые появляются в единицу времени.

Вероятность появления k событий простейшего потока за время длительностью t определяется формулой Пуассона $P_t(k)=\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$.

Функция распределения вероятностей (интегральная функция) случайной величины X:

$$F_X(x)=F(x)=P\{X<x\},\ x\in R.$$

Свойства функции распределения:

$$F_X(x)=F(x)=P\{X<x\},\ x\in R;$$

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0;$$

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1;$$

$F(x)$ — неубывающая функция, непрерывная *слева*;

$$P\{a\le X<b\}=F_X(b)-F_X(a).$$

Плотность распределения $f_X(x)=f(x)$ абсолютно непрерывной случайной величины X связана с функцией распределения $F_X(x)$ формулой

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(t)dt.$$

Свойства плотности:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(t)dt=1$$

для всех точек x, для которых функция распределения $F(X)$ дифференцируема, $F'(X)=f(x)$;

$$P\{a \le X \le b\} = P\{a < X \le b\} = P\{a \le X < b\} = P\{a < X < b\} =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Математическое ожидание случайной величины X обозначается $M(X)$ или MX и обладает свойствами (здесь $c=\text{const}$):

$$M(c)=c;$$

$$M(cX)=cMX;$$

$$M(X+Y)=MX+MY;$$

для *независимых* случайных величин X и Y

$$M(XY)=\text{MX}\cdot\text{MY}.$$

Математическое ожидание среднего арифметического одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин равно математическому ожиданию a каждой из величин:

$$M(\bar{X}) = a.$$

Вычисление для:

- дискретной случайной величины $M(X) = \sum_i x_i p_i$;
- непрерывной случайной величины $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$.

Дисперсия $D(X)=DX=M((X-MX)^2)$ случайной величины X обладает свойствами:

$$D(c)=0;$$

$$D(cX)=x^2DX;$$

$$D(X+Y)=DX+DY+2\text{cov}(X, Y);$$

для *независимых* случайных величин X и Y

$$D(X+Y)=DX+DY;$$

Вычисление для:

- дискретной случайной величины $D(X)=\sum_i (x_i - MX)^2 p_i$;
- непрерывной случайной величины

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-MX)^2 f(x)dx.$$

Дисперсию удобно вычислять по формуле

$$D(X)=DX=MX^2-(MX)^2,$$

где $M(X^2)=\sum_i x_i^2 p_i$ либо $M(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx.$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma_X=\sigma$ случайной величины X:

$$\sigma_X=\sqrt{DX}.$$

Правило трех сигм. Если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.

На практике правило трех сигм применяют так: если распределение изучаемой случайной величины неизвестно, но условие, указанное в приведенном правиле, выполняется, т. е. основание предполагать, что изучаемая величина распределена нормально; в противном случае она не распределена нормально. Заметим, что для любой случайной величины из неравенства Чебышева следует, что

$$P(|X-m|<3\sigma)\geq 0{,}9,$$
$$P(|X-m|<3{,}9\sigma)\geq 0{,}999.$$

Дисперсия среднего арифметического n одинаково распределенных взаимно независимых случайных величии в n раз меньше дисперсии D каждой из величин:

$$D(\bar{X})=D/n.$$

Среднее квадратическое отклонение среднего арифметического n одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин в $\sqrt{n}$ раз меньше среднего квадратического отклонения каждой из величин $\sqrt{D(\bar{X})}=\sigma/\sqrt{n}.$

Законы распределения

Название	Обозначение	Пояснения	
Альтернативный	$X \sim A(n; p)$	$X=1$ с вероятностью p (успех в одном испытании); $X=0$ с вероятностью $q=1-p$ (неудача в одном испытании)	
Биномиальный	$X \sim Bi(n; p)$	X — число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью p успеха в одном испытании	
Геометрический	$X \sim G(p)$	X — число испытаний Бернулли, которые придется произвести до первого успеха (с вероятностью p успеха в одном испытании)	
Пуассона	$X \sim \Pi(\lambda)$	X — число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью p успеха в одном испытании, когда n велико (несколько десятков или более) и $\lambda=np<10$	
Пуассона	$X \sim \Pi(\mu t)$	X — число наступлений за время t события простейшего потока событий с интенсивностью μ	

Законы распределения

Название	Обозначение	Пояснения	
Равномерный	$X \sim R(a; b)$	X — случайная величина, принимающая значения только из некоторого отрезка $[a; b]$, все значения внутри которого равновозможны	
Показательный (экспоненциальный)	$X \sim \text{Exp}(\mu)$	X — интервал времени между двумя последовательными наступлениями события в простейшем потоке событий с интенсивностью μ	
Нормальный	$X \sim N(a; \sigma)$	$X=X_1+X_2+\ldots+X_n$, где $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — большое число независимых в совокупности случайных величин, воздействие каждой из которых на X равномерно незначительно и равновероятно по знаку	

дискретных случайных величин

	Формула	Характеристики
	$P\{X=1\}=p;$ $P\{X=0\}=1-p$	$MX=p;$ $DX=p(1-p)$
	$P\{X=x\}=C_n^x p^x (1-p)^{n-x},$ $x=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$	$MX=np;\ DX=np(1-p)$
	$P\{X=x\}=p(1-p)^{x-1},$ $x=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$MX=\frac{1}{p},\ DX=\frac{1-p}{p^2}$
	$P\{X=x\}=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda},$ $x=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$MX=DX=\lambda$
	$P\{X=x\}=\frac{(\mu t)^x}{x!}e^{-\mu t},$ $x=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$MX=DX=\mu t$

непрерывных случайных величин

	Формула	Характеристики
	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in[a;\ b],\\ 0, & x\notin[a;\ b];\end{cases}\quad F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \frac{x-a}{b-a}, & x\in[a;\ b],\\ 1, & x>b\end{cases}$	$MX=\frac{a+b}{2};$ $DX=\frac{(b-a)^2}{12}$
	$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \mu e^{-\mu x}, & x\geq 0;\end{cases}\quad F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-\mu x}, & x\geq 0\end{cases}$	$MX=\frac{1}{\mu}$ $DX=\frac{1}{\mu^2}$
	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right);$ $F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right);$ $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2};\quad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-z^2/2}dz;$ $P(\alpha<X<\beta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\alpha}^{\beta}e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}dx;$ $P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-\alpha}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$ Значения функций $\varphi(x)$ и $\Phi(X)$ приведены в таблицах приложения	$MX=a;$ $DX=\sigma^2$

Начальный момент k-го порядка случайной величины X:

$$\nu_k(X) = M(X^k),\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Центральный момент k-го порядка случайной величины X:

$$\mu_k(X) = M((X - MX)^k),\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Свойства:

$$\mu_0(X) = \nu_0(X) = 1;$$
$$\mu_1(X) = 0;\ \nu_1(X) = MX;$$
$$\mu_2(X) = \nu_2(X) - \nu_1^2(X) = DX.$$

Медиана MeX абсолютно непрерывной случайной величины X:

$$P\{X < \mathrm{Me}X\} = P\{X > \mathrm{Me}X\} = 0{,}5.$$

Медиана MeX дискретной случайной величины X — любое число из отрезка $[x_m;\ x_{m+1}]$, называемом медианным и определяемом условиями: $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i \le 0{,}5$ и $\sum\limits_{i=1}^{m+1} p_i > 0{,}5$.

Линейная аппроксимация:

$$\mathrm{Me}X = x_m + \frac{x_{m+1} - x_m}{p_{m+1}}\left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{m} p_i\right).$$

Мода MoX абсолютно непрерывной случайной величины X с плотностью распределения $f(X)$ определяется условием: $f(\mathrm{Mo}X) = \max\limits_{x \in R} f(x)$.

Мода MoX дискретной случайной величины X определяется условием:

$$\mathrm{Mo}X = x_i \text{ при } p_i = \max\{p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n\}.$$

Коэффициент асимметрии A_x случайной величины X:

$$A_X = \frac{\mu_3(X)}{\sigma_X^3}.$$

Эксцесс E_X случайной величины X (обычно $-1 \le E_X \le 6$, для нормального распределения $E_{N(a;\,\sigma)} = 0$):

$$E_X = \frac{\mu_4(X)}{\sigma_X^4} - 3.$$

Левосторонняя критическая граница K_α (квантиль) уровня α случайной величины X:

$$P\{X < K_\alpha\} = F(K_\alpha) = \alpha.$$

Правосторонняя критическая граница B_α уровня α случайной величины X:

$$P\{X < B_\alpha\} = F(B_\alpha) = 1 - \alpha, \text{ т. е. } P\{X \ge B_\alpha\} = \alpha.$$

Свойство: $K_\alpha = B_{1-\alpha}$.

Если $y = \varphi(x)$ — дифференцируемая строго возрастающая или строго убывающая функция, обратная функция которой $x = \psi(y)$, $f(x)$ — плотность распределения случайной величины X, то плотность распределения $g(y)$ случайной величины $Y = \varphi(X)$:

$$g(y) = f(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)|.$$

Плотность распределения $g(y)$ случайной величины $Y = kX + b$:

$$g(y) = f\left(\frac{y-b}{k}\right) \cdot \frac{1}{|k|}.$$

Если X и Y *независимы*, а $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ их плотности, то плотность распределения $g(z)$ суммы $Z = X + Y$ (при условии, что плотность хотя бы одного из аргументов задана на интервале $(-\infty, +\infty)$ одной формулой) может быть найдена с помощью равенства $g(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(t) f_Y(z-t)\,dt$ или $g(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_y(t) f_X(z-t)\,dt$.

Среднеквадратическая регрессия Y на X:

$$Y - m_y = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - m_x).$$

Среднеквадратическая регрессия X на Y:

$$X - m_x = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y - m_y),$$

где $m_x = MX$, $m_y = MY$, $\sigma_x = \sqrt{DX}$, $\sigma_y = \sqrt{DY}$, $r = \mu_{xy}/(\sigma_x\sigma_y)$ — коэффициент корреляции величин X и Y.

Функция распределения многомерной случайной величины $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$:

$$F_X(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= P\{(X_1 < x_1)\cap(X_2 < x_2)\cap\ldots\cap(X_n < x_n)\}.$$

Функция распределения двумерной случайной величины $\xi = (X, Y)$:

$$F_\xi(x, y) = F_{X,Y}(x, y) = P\{(X < x)\cap(Y < y)\}.$$

Свойства:

- $0 \le F_{X,Y}(x, y) \le 1$ для всех $(x, y) \in R^2$;
- $F_{X,Y}(x, y)$ не убывает по каждому аргументу;
- $F_{X,Y}(x, y)$ непрерывна *слева* по каждому аргументу;
- $F_{X,Y}(x, -\infty) = F_{X,Y}(-\infty, y) = F_{X,Y}(-\infty, -\infty) = 0$;
- $F_{X,Y}(+\infty, +\infty) = 1$;
- $F_{X,Y}(x, +\infty) = F_X(x)$, $F_{X,Y}(+\infty, y) = F_Y(y)$;
- $P\{(a \le x < b)\cap(c \le x < d)\} = F_{X,Y}(b, d) + F_{X,Y}(a, c) - F_{X,Y}(a, d) - F_{X,Y}(b, c)$.

Для дискретной случайной величины $\xi = (X, Y)$:

$$p_{ij} = P\{(X = x_i)\cap(Y = y_j)\}, \ \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\right) = 1.$$

$$F_{X,Y}(x, y) = \sum_{x_i < x}\left(\sum_{y_j < y} p_{ij}\right).$$

Маргинальные законы распределения:

$$P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}; \ P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}.$$

Для абсолютно непрерывной случайной величины $\xi = (X, Y)$:

$$F_{X,Y}(x,\ y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(x,\ y)dxdy,$$

где $f_{X,\,Y}(x,\ y)$ — плотность распределения двумерной случайной величины $\xi=(X,\ Y)$.

Свойства:

- $f_{X,\,Y}(x,\ y)\geq 0$ для всех $(x,\ y)\in R^2$;
- $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,\ y)dxdy=1$;
- если существует $\dfrac{\partial^2 F_{X,Y}(x,\ y)}{\partial x\partial y}$, то

$$f_{X,Y}(x,\ y)=\frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,\ y)}{\partial x\partial y}.$$

Маргинальные плотности:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(x,\ y)dy;\quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(x,\ y)dx.$$

Условие независимости случайных величин X и Y *эквивалентно* условию:

- для дискретной случайной величины $\xi=(X,\ Y)$

$$P\{(X=x)\cap(Y=y)\}=P\{X=x\}\cdot P\{Y=y\};$$

- для абсолютно непрерывной случайной величины $\xi=(X,\ Y)$

$$f_{X,\,Y}(x,\ y)=f_X(x)\cdot f_Y(y).$$

Ковариация $\mathrm{cov}(X,\ Y)$ (корреляционный момент) случайных величин X и Y:

$$\mathrm{cov}(X,\ Y)=M((X-MX)\cdot(Y-MY))=M(XY)-MX\cdot MY.$$

Свойства:

$$\mathrm{cov}(X,\ Y)=\mathrm{cov}(Y,\ X);$$

$$\mathrm{cov}(X,\ X)=DX;\ \mathrm{cov}(Y,\ Y)=DY;$$

$$\mathrm{cov}(\alpha X,\ Y)=\mathrm{cov}(X,\ \alpha Y)=\alpha\mathrm{cov}(X,\ Y);$$

$$\mathrm{cov}(X+Y,\ Z)=\mathrm{cov}(X,\ Y)+\mathrm{cov}(Y,\ Z);$$

для *независимых* случайных величин X и Y $\operatorname{cov}(X, Y)=0$,

$$|\operatorname{cov}(X, Y)| \le \sqrt{DX \cdot DY}.$$

Коэффициент корреляции случайных величин X и Y:

$$r(X, Y)=r_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}=\frac{M(XY)-MX \cdot MY}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}.$$

Свойства:

- $-1 \le r(X, Y) \le 1$;
- случайные величины X и Y связаны линейной зависимостью $aX+bY=c$ (при $ab \ne 0$) тогда и только тогда, когда $|r(X, Y)|=1$;
- случайные величины X и Y *независимы*, следовательно, $r(X, Y)=0$;
- $r(X, Y)=0$, следовательно, случайные величины X и Y *некоррелированы*;
- из $r(X, Y)=0$ не следует, что случайные величины X и Y *независимы*;
- $r(X, Y) \ne 0$, следовательно, случайные величины X и Y *коррелированы*;
- $r(X, Y)=\pm 1$, следовательно, Y и X связаны *линейной* функциональной зависимостью;
- случайные величины X и Y *коррелированы*, следовательно, X и Y *зависимы*;
- если случайные величины X и Y *некоррелированы*, то из этого не следует, что X и Y *зависимы*;
- если случайные величины X и Y *некоррелированы*, то из этого не следует, что X и Y *независимы*;
- если случайные величины X и Y *зависимы*, то из этого не следует, что X и Y *некоррелированы*;
- если случайные величины X и Y *зависимы*, то из этого не следует, что X и Y *коррелированы*;
- случайные величины X и Y *независимы*, следовательно, X и Y *некоррелированы*.

Условная вероятность события $\{Y=y_j\}$ при условии $\{X=x_j\}$:

$$P\left\{Y=y_j \,/\, X=x_i\right\}=\frac{P\left\{(X=x_i)\bigcap(Y=y_j)\right\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_{ik}}.$$

Неравенство Маркова. Если положительная случайная величина X имеет конечное математическое ожидание MX, то для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$P\{X \le \varepsilon\} > 1 - \frac{MX}{\varepsilon}, \text{ т.е. } P\{X \ge \varepsilon\} \le \frac{MX}{\varepsilon}.$$

Неравенство Чебышева. Если случайная величина X имеет конечное математическое ожидание MX и дисперсию DX, то для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$P\left\{\left|X - MX\right| < \varepsilon\right\} \ge 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}..$$

Теорема Чебышева (закон больших чисел). Если дисперсии некоррелированных случайных величин X_1, X_2, ..., X_n ограничены сверху числом B, то для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$P\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} MX_i}{n}\right| < \varepsilon\right\} \ge 1 - \frac{B}{n\varepsilon^2}$$

и предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} MX_i}{n}\right| < \varepsilon\right\} = 1,$$

т. е.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{P} \frac{\sum_{i=1}^{n} MX_i}{n}.$$

Теорема Бернулли. Если вероятность успеха в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна p, то для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ справедливо предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1,$$

где m — число успехов в серии из n испытаний.

Центральная предельная теорема (следствие из теоремы Ляпунова). Если независимые случайные величины X_1, X_2, ..., X_n одинаково распределены с $MX_i=a$ и $DX_i=\sigma^2$, то

$$Z_n=\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - na}{\sigma\sqrt{n}} \sim N(0,\ 1),$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - na}{\sigma\sqrt{n}}<x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{2}+\Phi(x).$$

Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ.

Вероятность того, что значение случайной величины X попадет в интервал $(\alpha,\ \beta)$ находится по формуле

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ — интегральная функция Лапласа.

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения случайной величины X от ее математического ожидания меньше некоторого малого положительного числа δ равна

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ — интегральная функция Лапласа.

Дискретная двумерная случайная величина $(X,\ Y)$ задается законом распределения (таблицей). На пересечении столбца $X=x_i$ и строки $Y=y_j$ стоит число $p_{ij}=P\{(X=x_i)(Y=y_j)\}$ при $i\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ и $j\in\{1,\ \ldots,\ m\}$.

Маргинальные законы распределения получаются из условий:

$$p_X(x_i)=P(X=x_i)=p_{i1}+p_{i2}+\ldots+p_{im},$$

$$p_Y(y_j)=P(Y=y_j)=p_{1j}+p_{2j}+\ldots+p_{nj}.$$

Условная вероятность

Закон распределения X при условии, что $Y=y_j$, получается из условия

$$p\left(x_i \,/\, y_j\right)=\frac{p_{ij}}{p_Y(y_j)}.$$

Если двумерная величина (X, Y) является непрерывной, то вероятность того, что точка $M(x, y)$ содержится в некоторой области D плоскости Oxy, равна

$$P\{M(x, y)\in D\}=\iint\limits_D f(x, y)dxdy.$$

Функция $f(x, y)$ называется плотностью распределения вероятностей системы двух величин.

Функция распределения вероятностей системы двух величин $F(x, y)$ имеет вид

$$F(x, y)=P\{(X<x)\cdot(Y<y)\}=\int\limits_{-\infty}^{x}dx\int\limits_{-\infty}^{y}f(x, y)dy.$$

Свойства двумерной плотности вероятности:

$$f(x, y)\geq 0;$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x, y)dy=1;$$

$$F_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x, y)dy,\quad f_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x, y)dy;$$

$$F_Y(y)=\int\limits_{-\infty}^{y}dy\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)dx,\ \ f_Y(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)dx;$$

$$f(x,\ y)=\frac{\partial^2F(x,\ y)}{\partial x\partial y};$$

$$P\{(a_1\le x<b_1)\cdot(a_2\le y<b_2)\}=\int\limits_{a_1}^{b_1}dx\int\limits_{a_2}^{b_2}f(x,\ y)dy.$$

Непрерывные случайные величины X и Y независимы тогда и только тогда, когда $f(x,\ y)=f_X(x)f_Y(y)$, где $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ соответственно плотности распределения вероятностей случайных величин X и Y (маргинальные плотности). В этом случае

$$F(x,\ y)=P\{(X<x)\cdot(Y<y)\}=\int\limits_{-\infty}^{x}f_X(x)dx\cdot\int\limits_{-\infty}^{y}f_Y(y)dy=$$
$$=F_X(x)\cdot F_Y(y),$$

где $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ — соответственно функции распределения величин X и Y.

Условная плотность распределения X при $Y=y$ равна

$$f_X(x\,/\,y)=\frac{f(x,\ y)}{f_Y(y)}=\frac{f(x,\ y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)dx}.$$

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Группировка для выборки $x_1,\ \ldots,\ x_n$ при больших объемах выборки $n>30$: $x_{\min}=\min\{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\}$, $x_{\max}=\max\{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\}$; размах выборки $R=x_{\max}-x_{\min}$; длина интервала $(a_i,\ b_i)$ равна $h=\dfrac{x_{\max}-x_{\min}}{1+3{,}32\lg n}$; для $1\le i\le k$ получаем $a_1=x_{\min}-h/2$, $b_1=a_1+h$, $x_n\le b_k$; при этом частотой n_i интервала $(a_i,\ b_i)$ считают количество значений наблюдаемой величины, удовлетворяющих неравенству $a_i\le x_i<b_i$; относительная частота — это $w_i=\dfrac{n_i}{n}$; интервальный вариаци-

онный ряд заменяют дискретным ранжированным рядом, беря в качестве варианты с частотой n_i среднее значение $x_i = \dfrac{a_i + b_i}{2}$; накопленная частота $n_i^{\text{н}} = n_1 + n_2 + \ldots + n_i$.

Характеристики ряда распределения (ряда наблюдений):

- *выборочное среднее* (оценка матожидания m)

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n};$$

- выборочная дисперсия

$$D = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i - \left(\bar{x}\right)^2;$$

- исправленная выборочная дисперсия

$$\tilde{s}^2 = \frac{n}{n-1}D;$$

- выборочная дисперсия (оценка дисперсии σ^2 при известном матожидании a)

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - a\right)^2;$$

- выборочное и исправленное выборочное среднее квадратическое

$$s = \sqrt{D}, \quad \tilde{s} = \sqrt{\frac{n}{n-1}D}.$$

Медиана дискретного ранжированного (вариационного) ряда:

- если n нечетно, то Me — значение наблюдаемой величины, находящееся в середине ранжированного ряда;
- если n четно, то Me — среднее арифметическое двух срединных значений.

Медиана сгруппированного ранжированного (вариационного) ряда:

- если есть варианта с накопленной частотой $n_i^{\text{н}} = \dfrac{n}{2}$, то

  Ме — среднее арифметическое варианты, имеющей указанную накопленную частоту и следующей за ней варианты;
- если нет варианты с накопленной частотой $n_i^{\text{н}} = \dfrac{n}{2}$, то Ме — наименьшая варианта, имеющая накопленную частоту, превышающую $n/2$.

Медиана интервального ряда вычисляется по формуле

$$\text{Me} = a_{\text{Me}} + h \cdot \frac{\frac{n}{2} - n^{\text{н}}_{\text{Me}-1}}{n_{\text{Me}}},$$

где a_{Me} — нижняя граница медианного интервала; n_{Me} — частота медианного интервала; $n^{\text{н}}_{\text{Me}-1}$ — накопленная частота интервала, предшествующего медианному. Медианный интервал — тот, в пределах которого расположена варианта, чья накопленная частота либо равна половине объема выборки, либо минимально превышает эту половину.

Мода сгруппированного ранжированного (вариационного) ряда Мо — варианта с наибольшей частотой.

Мода одномодального интервального ряда вычисляется по формуле

$$\text{Mo} = a_{\text{Me}} + h \cdot \frac{n_{\text{Mo}} - n_{\text{Mo}-1}}{2n_{\text{Mo}} - n_{\text{Mo}-1} - n_{\text{Mo}+1}},$$

где a_{Me} — нижняя граница модального интервала; n_{Me}, $n_{\text{Me}-1}$, $n_{\text{Me}+1}$ — частоты модального интервала, ему предшествующего и последующего интервалов. Модальный интервал — интервал с наибольшей частотой (таких интервалов может быть несколько).

Выборочное среднее $\bar{x}$ является состоятельной и несмещенной оценкой математического ожидания наблюдаемого признака, мода Мо показывает наиболее часто встречающуюся варианту, медиана Ме показывает границу значения признака, которую достигли половина элементов выборки. Если три указанные величины почти не отличаются друг от друга, то можно сделать предположение о симметричности теоретического распределения изучаемого признака.

Эмпирическая функция распределения

$$F^*(x)=\frac{n_i^{\text{н}}}{n}$$

при $x_i<x\le x_{i+1}$, или $F^*(x)=\dfrac{n(x)}{n}$, где $n(x)$ — количество членов выборки, меньших x. Эмпирическая функция распределения имеет скачки в точках сгруппированного ряда; величина скачка в точке x_i равна n_i.

Эмпирическая плотность распределения

$$p^*(x)=\begin{cases}\dfrac{n_i}{hn} & \text{при } x_i\in[a_i,\ b_i),\ 1\le i\le k,\\ 0 & \text{при } x_i\notin[a_1,\ b_k).\end{cases}$$

Выравнивающие частоты

$$y_i=\frac{nh}{s}\cdot\varphi\left(\frac{x_i-\bar{x}}{s}\right),$$

где $\varphi(u)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}$, x_i — середина i-го интервала.

Доверительный интервал или интервальная оценка для параметра θ — интервал (θ_1,θ_2), содержащий (накрывающий) истинное значение θ с заданной вероятностью $1-\alpha$: $P\{\theta_1<\theta<\theta_2\}=1-\alpha$.

Доверительная вероятность (надежность) $\gamma=1-\alpha$.

Уровень значимости α обычно выбирают равным: $\alpha=0{,}001$; $\alpha=0{,}01$; $\alpha=0{,}05$.

Закон: *нормальный* $N(a,\sigma)$.

<table>
<tr><td rowspan="2">Оценка неизвестного математического ожидания a</td><td>Известно:
выборочное среднее $\bar{x}$</td><td>Известно:
среднее квадратическое отклонение σ</td></tr>
<tr><td colspan="2">Правило
$\bar{x}-\dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}\le a\le\bar{x}+\dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}$,
t находится из уравнения $\dfrac{\gamma}{2}=\Phi(t)$ для интегральной функции Лапласа по таблице.
Точность оценки равна $\Delta=\dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}$</td></tr>
</table>

Продолжение табл.

<table>
<tr>
<td rowspan="3">Оценка неизвестного математического ожидания a</td>
<td>Известно:
выборочное среднее $\bar{x}$</td>
<td>Известно:
выборочное среднее квадратическое отклонение s</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Правило (при $n \le 30$)
$$\bar{x} - \frac{t_\alpha s}{\sqrt{n-1}} < a < \bar{x} + \frac{t_\alpha s}{\sqrt{n-1}},$$
t_α находится по таблице распределения Стьюдента.
Точность оценки равна $\Delta = \frac{t_\alpha s}{\sqrt{n-1}}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Правило (при $n > 30$)
$$\bar{x} - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} \le a \le \bar{x} + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}},$$
t_γ находится по таблице.
Точность оценки равна $\Delta = \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}$</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="4">Оценка неизвестного среднего квадратического отклонения σ и дисперсии $D(X) = \sigma^2$</td>
<td colspan="2">Известно:
выборочное среднее квадратическое отклонение s</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Правило
$s(1-q) < \sigma < s(1+q)$, если $q < 1$;
$0 < \sigma < s(1+q)$, если $q < 1$;
q находится по таблице по заданным n и γ</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Правило (при $n > 30$)
$$\frac{s\sqrt{2n}}{\sqrt{2n-3}+t} < \sigma < \frac{s\sqrt{2n}}{\sqrt{2n-3}-t},$$
t находится из уравнения $\frac{\gamma}{2} = \Phi(t)$ для интегральной функции Лапласа по таблице</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Правило (при $n \le 30$)
$$\frac{(n-1)s^2}{\chi_2^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi_1^2},$$
где χ_1^2 и χ_2^2 находятся по таблице χ^2-распределения Пирсона из условий:
$$P(\chi_1^2) = P(\chi^2 > \chi_1^2) = 1 - \frac{\alpha}{2}, \quad P(\chi_2^2) = P(\chi^2 > \chi_2^2) = \frac{\alpha}{2}$$</td>
</tr>
</table>

Приближенные интервальные оценки для математического ожидания и дисперсии генеральной совокупности *с произвольным законом распределения при объеме выборки* $n \gg 1$ можно строить по формулам, найденным для нормальной генеральной совокупности.

Измерение прибором физической величины. При оценке погрешности необходимо учитывать как случайные ошибки многократных равноточных (подчиняющихся нормальному распределению), так и ошибки однократных (подчиняющихся равномерному распределению) измерений.

Погрешность многократных равноточных измерений (одним и тем же прибором) равна Δ. Физическая величина имеет значение в интервале $\overline{x} \pm \Delta$ с доверительной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha$. Результаты измерения нормально распределены.

Погрешность однократных измерений (погрешность прибора) равна $\Delta_{\text{ои}}$, распределена равномерно и связана с точностью измерительного прибора $\Delta_{\text{ои}} = d \cdot \gamma$, где $d = \dfrac{b-a}{2}$. Обычно d *(приборная ошибка)* равно цене деления или половине цены деления, или задается маркировкой класса точности прибора.

Доверительный интервал $(\overline{x} - \varepsilon,\ \overline{x} + \varepsilon)$ **измерений величины** x в серии опытов, $\varepsilon = \sqrt{\Delta^2 + \Delta_{\text{ои}}^2}$ (ε — полная погрешность).

Для выборки $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ объема n из двумерной генеральной совокупности (X, Y) вычисляется:

- выборочное частичное среднее $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, выборочное частичное среднее $\overline{y} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i$;
- выборочная частичная дисперсия $\tilde{D}_X = \dfrac{1}{n} Q_X$, где

$$Q_X = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2;$$

- выборочная частичная дисперсия $\tilde{D}_Y = \dfrac{1}{n} Q_Y$, где

$$Q_Y = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2;$$

- выборочная ковариация

$$\tilde{k}_{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n}Q_{XY},$$

где

$$Q_X = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right);$$

- выборочный коэффициент корреляции

$$r = \tilde{r}_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} = \frac{Q_{XY}}{\sqrt{Q_X Q_Y}}.$$

Чем ближе $|r|$ к единице, тем связь сильнее; чем ближе $|r|$ к нулю, тем связь слабее.

Градации величин корреляции по силе связи:

- $|r| < 0{,}2$ — очень слабая связь;
- $0{,}2 < |r| < 0{,}5$ — слабая связь;
- $0{,}5 < |r| < 0{,}7$ — средняя связь;
- $0{,}7 < |r| < 0{,}9$ — сильная связь;
- $|r| > 0{,}9$ — очень сильная связь.

Уравнение линии регрессии для n пар значений $(x_i; y_i)$: $y = kx + b$, где

$$k = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}; \quad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

Линия регрессии — это прямая, построенная методом наименьших квадратов: сумма квадратов расстояний (вычисленных по оси Y) от каждой точки графика рассеивания до прямой является минимальной.

Критерий Стьюдента для проверки статистической значимости корреляционной зависимости величин:

$$t_{\text{расчет}} = \frac{|r|}{\sqrt{1 - r^2}}\sqrt{n - 2}.$$

Для уровня значимости α и числа степеней свободы, равных $n-2$ по таблице распределения Стьюдента, находится критическое значение критерия Стьюдента $t_{\alpha;(n-2)}$. Если $t_{\text{расчет}} > t_{\alpha;(n-2)}$, то корреляционная связь между x и y статистически значимая.

Проверка гипотез при заданном уровне значимости α.

Основная гипотеза H_0 для параметра распределения θ: $\theta = \theta_0$, где θ_0 — эталон (гипотетическое значение).

Конкурирующая гипотеза (альтернатива) — H_1 задается одним из условий: *правосторонняя* $\theta > \theta_0$; *двусторонняя* $\theta \neq \theta_0$; *левосторонняя* $\theta < \theta_0$.

Ошибка первого рода. Может оказаться, что выборочное значение статистики попало в критическую область, и мы отклонили гипотезу H_0, в то время как, на самом деле, она верна. Вероятность совершить такую ошибку равна уровню значимости α.

Ошибка второго рода. Может оказаться, что выборочное значение статистики попало в допустимую область, и будет принято решение в пользу H_0, в то время, как, на самом деле, верна гипотеза H_1.

Задача. В n независимых испытаниях с *неизвестной вероятностью успеха* p в каждом испытании найдена относительная частота m/n. Проверить гипотезу о соотношении истинной и предполагаемой вероятности.

Основная гипотеза H_0	**Конкурирующая гипотеза H_1**	**Наблюдаемое значение критерия (вычислить)**	**Критическая точка $u_{\text{кр}}$ (уровень значимости α)**	**Выводы**
p равна гипотетической вероятности p_0, т. е. $p=p_0$	$p \neq p_0$	$U = \dfrac{(m/n - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}$	$\Phi(u_{\text{кр}}) = \dfrac{1-\alpha}{2}$ $\Phi(t)$ — функция Лапласа	Если $\lvert U\rvert < u_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть H_0. Если $\lvert U\rvert > u_{\text{кр}}$, то H_0 отвергается
	$p > p_0$	$U = \dfrac{(m/n - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}$	$\Phi(u_{\text{кр}}) = \dfrac{1-2\alpha}{2}$ $\Phi(t)$ — функция Лапласа	Если $U < u_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть H_0. Если $U > u_{\text{кр}}$, то H_0 отвергается
	$p < p_0$	$U = \dfrac{(m/n - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}$	$\Phi(u_{\text{кр}}) = \dfrac{1-2\alpha}{2}$ $\Phi(t)$ — функция Лапласа	Если $U > -u_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть H_0. Если $U < -u_{\text{кр}}$, то H_0 отвергается

Задача. Над случайной величиной X проделано n независимых наблюдений, а над случайной величиной Y — m независимых наблюдений. При известных дисперсиях $D(X)=\sigma_1^2$ и $D(Y)=\sigma_2^2$ проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий a_1 и a_2.

Основная гипотеза H_0	**Конкурирующая гипотеза H_1**	**Наблюдаемое значение критерия (вычислить)**	**Критическая точка $u_{кр}$ (уровень значимости α)**	**Выводы**
Математические ожидания равны т. е. $a_1=a_2$	$a_1 \neq a_2$	$U=\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n}+\dfrac{\sigma_2^2}{m}}}$, где $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — выборочные средние	$\Phi(u_{кр})=\dfrac{1-\alpha}{2}$, $\Phi(t)$ — функция Лапласа	Если $\lvert U\rvert < u_{кр}$, то нет оснований отвергнуть H_0. Если $\lvert U\rvert > u_{кр}$, то H_0 отвергается

Задача. Над случайной величиной X проделано n независимых наблюдений, а над случайной величиной Y — m независимых наблюдений. При неизвестных дисперсиях проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий a_1 и a_2.

Основная гипотеза H_0	**Конкурирующая гипотеза H_1**	**Наблюдаемое значение критерия (вычислить)**	**Критическая точка $u_{кр}$ (уровень значимости α)**	**Выводы**
Математические ожидания равны, т. е. $a_1=a_2$	$a_1 \neq a_2$	$U=\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n}+\dfrac{s_2^2}{m}}}$, где $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — выборочные средние, $s_1^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{x})^2}{n-1}$, $s_1^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\bar{y})^2}{m-1}$	$\Phi(u_{кр})=\dfrac{1-\alpha}{2}$, $\Phi(t)$ — функция Лапласа	Если $\lvert U\rvert < u_{кр}$, то нет оснований отвергнуть H_0. Если $\lvert U\rvert > u_{кр}$, то H_0 отвергается

Задача. Двумерная генеральная совокупность (X, Y) распределена нормально. По выборке объема n найден выборочный коэффициент корреляции $r=\tilde{r}_{XY}\neq 0$. Проверить гипотезу о том, что генеральный коэффициент корреляции $r_г$ не равен нулю.

Основная гипотеза H_0	Конкурирующая гипотеза H_1	Наблюдаемое значение критерия (вычислить)	Критическая точка $u_{кр}$ (уровень значимости α)	Выводы
Генеральный коэффициент корреляции равен нулю $r_г = 0$	$r_г \neq 0$	$T = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$	$t_{кр}(\alpha, n-2)$ — точка двусторонней критической области, таблица распределений Стьюдента	Если $\lvert T\rvert < t_{кр}$, то нет оснований отвергнуть H_0. Если $\lvert T\rvert > t_{кр}$, то H_0 отвергается.

Задача. Эмпирическое распределение задано в виде последовательности равноотстоящих (h — шаг) вариант x_i и соответствующих им частот n_i, $i=1, \ldots, N$. Проверить гипотезу о том, что распределение нормальное.

Основная гипотеза H_0	Конкурирующая гипотеза H_1	Наблюдаемое значение критерия (вычислить)	Критическая точка $u_{кр}$ (уровень значимости α)	Выводы
Нормальное распределение	Распределение не является нормальным	$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(n_i - n_i^*\right)^2}{n_i^*}$, где $n_i^* = \frac{nh}{s} \cdot \varphi\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s}\right)$ — теоретические частоты, $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$, $\bar{x}$ и s — выборочное среднее и выборочное среднее квадратическое	По таблице критических точек распределения χ^2 по α и числу степеней свободы $m=N-3$, где N — число групп выборки, найти $\chi^2_{кр}(\alpha, m)$ правосторонней критической области	Если $\chi^2 < \chi^2_{кр}$, то нет оснований отвергнуть H_0. Если $\chi^2 > \chi^2_{кр}$, то H_0 отвергается

Задача. Эмпирическое распределение непрерывной случайной величины задано в виде последовательности интервалов $x_i - x_{i+1}$ и соответствующих им частот n_i, $i=1, \ldots, N$. Проверить гипотезу о том, что распределение Пуассона.

Основная гипотеза H_0	Конкурирующая гипотеза H_1	Наблюдаемое значение критерия (вычислить)	Критическая точка $u_{кр}$ (уровень значимости α)	Выводы
Распределение Пуассона	Распределение не является распределением Пуассона	$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*}$, где $n_i^* = \frac{\lambda^i \cdot e^{\lambda} \cdot n}{i!} = nP_n(i)$, $P_n(i)$ — вероятность появления равно i событий в n испытаниях, $\lambda = \bar{x}$, $\bar{x}$ — выборочное среднее	По таблице критических точек распределения χ^2 по α и числу степеней свободы $m = N - 2$, где N — число интервалов выборки найти $\chi^2_{кр}(\alpha, m)$ правосторонней критической области	Если $\chi^2 < \chi^2_{кр}$, то нет оснований отвергнуть H_0. Если $\chi^2 > \chi^2_{кр}$, то H_0 отвергается

Задача. Эмпирическое распределение непрерывной случайной величины задано в виде последовательности интервалов $x_i - x_{i+1}$ и соответствующих им частот n_i, $i = 1, \ldots, N$. Проверить гипотезу о том, что распределение показательное.

Основная гипотеза H_0	Конкурирующая гипотеза H_1	Наблюдаемое значение критерия (вычислить)	Критическая точка $u_{кр}$ (уровень значимости α)	Выводы
Показательное распределение	Распределение не является показательным	$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*}$, где $n_i^* = n \cdot (e^{-\lambda x_i} - e^{-\lambda x_{i+1}})$, $\lambda = (\bar{x})^{-1}$, $\bar{x}$ — выборочное среднее	По таблице критических точек распределения χ^2 по α и числу степеней свободы $m = N - 2$, где N — число интервалов выборки, найти $\chi^2_{кр}(\alpha, m)$ правосторонней критической области	Если $\chi^2 < \chi^2_{кр}$, то нет оснований отвергнуть H_0. Если $\chi^2 > \chi^2_{кр}$, то H_0 отвергается.

Задача. Эмпирическое распределение непрерывной случайной величины задано в виде последовательности интервалов $x_i - x_{i+1}$ и соответствующих им частот n_i,

$i=1, \ldots, N$. Проверить гипотезу о том, что распределение равномерное.

Основная гипотеза H_0	Конкурирующая гипотеза H_1	Наблюдаемое значение критерия (вычислить)	Критическая точка $u_{кр}$ (уровень значимости α)	Выводы
Равномерное распределение	Распределение не является равномерным	$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(n_i - n_i^*\right)^2}{n_i^*}$, где $n_1^* = n \cdot \frac{x_1 - a^*}{b^* - a^*}$, $n_i^* = n \cdot \frac{x_i - x_{i-1}}{b^* - a^*}$, $n_N^* = n \cdot \frac{b^* - x_{N-1}}{b^* - a^*}$, $a^* = \bar{x} - \sqrt{3}s$, $b^* = \bar{x} + \sqrt{3}s$, $\bar{x}$ и s — выборочное среднее и выборочное среднее квадратическое	По таблице критических точек распределения χ^2 по α и числу степеней свободы $m=N-3$, где N — число интервалов выборки, найти $\chi^2_{кр}(\alpha, m)$ правосторонней критической области	Если $\chi^2 < \chi^2_{кр}$, то нет оснований отвергнуть H_0. Если $\chi^2 > \chi^2_{кр}$, то H_0 отвергается

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Тип и канонический вид уравнения. Общее линейное уравнение с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными имеет вид:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f, \qquad (1)$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22}, a, b, c, f заданные функции переменных x, y.

Уравнение (1) принадлежит к гиперболическому типу в точке (x, y), если

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0.$$

Уравнение (1) принадлежит к эллиптическому типу в точке (x, y), если

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0.$$

Уравнение (1) принадлежит к параболическому типу в точке (x, y), если

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0.$$

Уравнение

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0 \qquad (2)$$

называется уравнением характеристик для уравнения (1), а кривые, определяемые соотношением $\varphi(x, y) = C$, где $\varphi(x, y)$ — решение уравнения (2), называются характеристиками уравнения (1).

Уравнение (2) эквивалентно двум уравнениям:

$$a_{11}dy - \left(a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\right)dx = 0. \qquad (3)$$

У уравнения гиперболического типа имеются две вещественные характеристики: $\varphi(x, y) = C$ и $\psi(x, y) = C$. Замена $\xi = \varphi(x, y)$ и $\eta = \psi(x, y)$ приводит уравнение (1) к каноническому виду:

$$u_{\xi\eta} + \alpha_1 u_\xi + \beta_1 u_\eta + \eta_1 = f_1.$$

Для уравнения эллиптического типа общие интегралы уравнения (3) являются комплексно сопряженными. Пусть $\varphi(x, y) \pm i\psi(x, y) = C$ — комплексные характеристики. Тогда замена $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ приводит уравнение (1) к каноническому виду:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \alpha_2 u_\xi + \beta_2 u_\eta + \gamma_2 u = f_2.$$

Для уравнения параболического типа характеристика одна: $\varphi(x, y) = C$. Замена $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, где $\psi(x, y)$ — произвольная дважды гладкая функция, удовлетворяющая условию $\dfrac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \neq 0$, в рассматриваемой области приводит уравнение (1) к каноническому виду:

$$u_{\eta\xi} + \alpha_3 u_\xi + \beta_3 u_\eta + \gamma_3 u = f_3.$$

Задача Штурма — Лиувилля. Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{d}{dx}\left(K(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0, \qquad (4)$$

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0. \qquad (5)$$

Здесь $K(x) \in C^1[a, b]$, $K(x) > 0$, $q(x) \in C[a, b]$, $q(x) \geq 0$, $\rho(x) \in C[a, b]$, $\rho(x) > 0$, параметры α_1, α_2, β_1, β_2 удовлетворяют условиям $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$. Требуется найти такие значения параметра λ, при которых существуют отличные от тождественного нуля (нетривиальные) решения дифференциального уравнения (4), удовлетворяющие краевым условиям (5).

Те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения задачи (4)–(5), называются *собственными значениями задачи* Штурма — Лиувилля, а соответствующие им нетривиальные решения — *собственными функциями*.

Свойства собственных значений и собственных функций

1. Существует множество собственных значений $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$, $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$, которым соответствуют собственные функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$, ...

2. Собственные функции на отрезке $[a, b]$, отвечающие разным значениям параметра λ, ортогональны с весом $\rho(x)$:

$$\int_a^b \rho(x) y_n(x) y_m(x) dx = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n.$$

3. Теорема Стеклова. Всякая функция $f(x)$, удовлетворяющая краевым условиям (5) и имеющая непрерывную первую производную и кусочно-непрерывную вторую производную, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям $y_n(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x), \quad c_n = \frac{\int_a^b \rho(x) f(x) y_n(x) dx}{\int_a^b \rho(x) y_n^2(x) dx}.$$

Для примера решим следующую задачу Штурма — Лиувилля. Найти отличные от тождественного нуля решения $y=y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющие заданным краевым условиям:

$$y''+\lambda y=0,\ x\in[1;\,2], \tag{6}$$

$$y(1)=0,\ y'(2)=0. \tag{7}$$

Рассмотрим три случая.

1. $\lambda<0$. Общее решение уравнения (6) имеет вид

$$y=C_1\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda}(x-1)+C_2\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda}(x-1).$$

Из условия $y(1)=0$ находим

$$C_2=0,\ \ y(x)=C_1\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda}(x-1).$$

Из условия $y'(2)=0$ получаем $C_1=0$, т. е. $y\equiv 0$.

2. $\lambda=0$. Общее решение уравнения (6) имеет вид $y=C_1(x-1)+C_2$.

Из условия $y(1)=0$ следует, что $C_2=0$, $y=C_1(x-1)$. Из условия $y'(2)=0$ получаем $C_1=0$, т. е. $y\equiv 0$.

3. $\lambda>0$. Общее решение уравнения (6) имеет вид

$$y(x)=C_1\sin\sqrt{\lambda}(x-1)+C_2\cos\sqrt{\lambda}(x-1).$$

Из условия $y(1)=0$ получаем

$$C_2=0,\ \ y(x)=C_1\sin\sqrt{\lambda}(x-1).$$

Условие $y'(2)=0$ приводит к уравнению $C_1\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}=0$.

Так как $\sqrt{\lambda}\neq 0$ и $C_1\neq 0$, то $\cos\sqrt{\lambda}=0$. Следовательно, $\sqrt{\lambda}=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $n=0,\,1,\,2,\,\ldots$

Таким образом, собственные значения задачи Штурма — Лиувилля (6)–(7) равны

$$\lambda_n=(\pi/2+\pi n)^2,\ n=0,\,1,\,2,\,\ldots,$$

собственные функции —

$$y_n=\sin((\pi/2+\pi n)(x-1)),\ n=0,\,1,\,2,\,\ldots$$

МЕТОД ФУРЬЕ

Гиперболические уравнения

1. Первая смешанная задача для волнового уравнения на отрезке $[0, l]$:

$$u_{tt}=a^2u_{xx}, \tag{8}$$

$$u(x, 0)=f(x),\ u_t(x, 0)=g(x),$$
$$u(0, t)=0,\ u(l, t)=0. \tag{9}$$

Сначала ищем частные решения уравнения (8), отличные от тождественного нуля и удовлетворяющие условиям (9) в виде

$$u(x, t)=T(t)X(x). \tag{10}$$

Подставляя выражение (10) в (8) получаем

$$T''+a^2\lambda T=0, \tag{11}$$
$$X''+\lambda X=0,\ \lambda=\text{const}.$$

Таким образом, получена задача Штурма — Лиувилля

$$X''+\lambda X=0,\ X(0)=X(l)=0.$$

Решая ее, получим $\lambda=\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, $n=1, 2, \ldots$, и собственные функции $X_n=\sin\frac{\pi n}{l}x$.

Общее решение уравнения (11), подставляя в него $\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$ вместо λ:

$$T_n=A_n\cos\frac{\pi na}{l}t+B_n\sin\frac{\pi na}{l}t.$$

Решение задачи (8)–(9) надо искать в виде

$$u(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{\pi na}{l}t+B_n\sin\frac{\pi na}{l}t\right)\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l u_0(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx;\ B_n=\frac{2}{\pi na}\int_0^l u_1(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx,\ n=1,\ 2,\ \ldots$$

Эллиптические уравнения

Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге радиуса R

$$\Delta u=0,\ u|_{r=R}=f(\varphi),$$

где $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $(r,\ \varphi)$ — полярные координаты точки $(x,\ y)$.

В полярных координатах уравнение Лапласа имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0. \tag{12}$$

Решение этого уравнения будем искать методом Фурье. Для этой цели найдем вспомогательные нетривиальные решения в виде $v(r,\ \varphi)=R(r)\Phi(\varphi)$. Подставляя $v(r,\ \varphi)$ в (12), получим

$$\Phi(r^2R''+rR')=-R\Phi''$$

или разделяя переменные

$$\frac{r^2R''+rR'}{R}=-\frac{\Phi''}{\Phi}=\lambda.$$

Из последнего соотношения для нахождения функций $\Phi(\varphi)$, $R(r)$ получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\Phi''+\lambda\Phi=0, \tag{13}$$

$$r^2R''+rR'-\lambda R=0,\ \lambda=\text{const}. \tag{14}$$

Из условия

$$v(r,\ \varphi+2\pi)=v(r,\ \varphi)$$

следует, что $\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$.

Таким образом, λ не может быть отрицательным числом, так как общее решение уравнения (13) имеет вид $\Phi=C_1\mathrm{sh}\sqrt{-\lambda}\varphi+C_2\mathrm{ch}\sqrt{-\lambda}\varphi$ и, следовательно, из условия периодичности вытекает $C_1=0$, т. е. $\lambda=0$ — собственное значение задачи Штурма — Лиувилля. Соответствующая собственная функция

$$\Phi_0=C_2.$$

Пусть $\lambda > 0$. Тогда $\Phi = C_1 \sin\sqrt{\lambda}\varphi + C_2 \cos\sqrt{\lambda}\varphi$. Условие периодичности с периодом 2π означает, что $\lambda = n^2$ и соответствующие собственные функции равны

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi,\ n = 1,\ 2,\ \ldots$$

Общее решение уравнения (14) имеет вид

$$R_o = C_0 + D_0 \ln r,$$

если $n = 0$, $R_n = C_n r^n + D_n r^{-n}$ при $n > 0$.

В силу ограниченности решения $v(r, \varphi)$ в центре круга имеем $|R(0)| < \infty$, т. е.

$$R_o = C_0 \text{ при } n = 0,\ R_n = C_n r^n \text{ при } n > 0.$$

Решение задачи Дирихле будем искать в виде

$$u(r,\ \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) r^n,$$

где коэффициенты A_0, A_n, B_n, $n = 1, 2, \ldots$, определяются по формулам:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) d\varphi;$$

$$A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi;$$

$$B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi.$$

Замечание 1. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в кольце ищется в виде

$$u(r,\ \varphi) = C_0 + D_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(A_n r^n + \frac{C_n}{r^n} \right) \cos n\varphi + \left(B_n r^n + \frac{D_n}{r^n} \right) \sin n\varphi \right).$$

Замечание 2. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа вне круга радиуса R ищется в виде

$$u(r,\ \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) r^{-n}.$$

Параболические уравнения

Первая смешанная задача для уравнения теплопроводности на отрезке $[0, l]$:

$$u_t = a^2 u_{xx},\ u(x, 0) = u_0(x),\ u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

Применяя метод Фурье, получим, что решение указанной задачи ищется в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n}{l} x,$$

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(x) \sin\frac{\pi n}{l} x\,dx;\ n = 1, 2, \ldots$$

Уравнения гиперболического типа

1. Задача Коши для одномерного волнового уравнения:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x \in (-\infty, \infty),\ t > 0;$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x);$$
$$u_t|_{t=0} = \psi(x).$$

Решение задачи Коши задается формулой Даламбера:

$$u(x,\ t) = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi.$$

2. Задача Коши для двумерного волнового уравнения:

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t);$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x, y);$$
$$u_t|_{t=0} = \psi(x, y).$$

Решение задается формулой Пуассона:

$$u(x,\ y,\ t) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{K_{at}} \frac{\varphi(\xi,\ \eta)}{\sqrt{a^2 t^2 - \rho^2}} d\xi d\eta +$$

$$+\iint_{K_{at}} \frac{\psi(\xi,\ \eta)}{\sqrt{a^2 t^2 - \rho^2}} d\xi d\eta + \int_0^t d\tau \iint_{K_{a(t-t)}} \frac{f(\xi,\ \eta,\ \tau)}{\sqrt{a^2 (t-\tau)^2 - \rho^2}} d\xi d\eta,$$

где $\rho^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2$; а $K_{a\mu}$ — круг радиуса $a\mu$ с центром в точке (x, y).

3. Задача Коши для трехмерного волнового уравнения:

$$u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})+f(x, y, z, t);$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x, y, z);$$

$$u_t|_{t=0}=\psi(x, y, z).$$

Решение задается формулой Кирхгофа:

$$u(x, y, z, t)=\frac{1}{4\pi a^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_{at}}\frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta)}{t}d\sigma+\iint_{S_{at}}\frac{\psi(\xi, \eta, \zeta)}{t}d\sigma+\int_0^t d\tau\iint_{S_{at}}\frac{f(\xi, \eta, \zeta, \tau)}{t-\tau}d\sigma\right],$$

где $S_{a\mu}$ — сфера радиуса $a\mu$ с центром в точке (x, y, z).

Эллиптические уравнения

1. Уравнение Лапласа $\Delta u=0$ в декартовой системе координат:

- двумерный случай $u_{xx}+u_{yy}=0$;
- трехмерный случай $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$.

2. Уравнение Лапласа в полярной системе координат (r, φ)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0.$$

3. Уравнение Лапласа в цилиндрической системе координат (r, φ, z)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

4. Уравнение Лапласа в сферической системе координат (r, φ, ψ)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{r^2\sin\psi}\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\sin\psi\frac{\partial u}{\partial \psi}\right)=0.$$

5. Уравнение Пуассона

$$\Delta u = f.$$

Параболические уравнения

Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{tt},$$

$$\mathrm{u}\big|_{t=0} = \varphi(t)$$

выражается формулой Пуассона

$$u(x,\ t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}} d\xi.$$

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Если x^* — приближенное значение и x — точное значение, то:

- абсолютная погрешность равна $\Delta(x^*) = |x - x^*|$;
- предельная абсолютная погрешность $\bar{\Delta}(x^*)$ удовлетворяет неравенству $\bar{\Delta}(x^*) \geq |x - x^*|$;
- относительная погрешность равна

$$\delta(x^*) = \frac{\Delta(x^*)}{|x|} \approx \frac{\Delta(x^*)}{|x^*|};$$

- предельная относительная погрешность равна

$$\bar{\delta}(x^*) = \frac{\bar{\Delta}(x^*)}{|x|} \approx \frac{\bar{\Delta}(x^*)}{|x^*|}.$$

Запись приближенных чисел:

$$a^* = \pm(\alpha_m 10^m + \alpha_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + \alpha_{m-n+1} 10^{m-n+1}),\ \alpha_m \neq 0.$$

Значащей цифрой приближенного числа a^* называется всякая цифра в его десятичном изображении, отличная от нуля, и нуль, если он содержится между значащими цифрами или является представителем сохраненного десятичного разряда. Все остальные нули, входящие в состав приближенного числа и служащие лишь для обозначения его десятичных разрядов, не причисляются к значащим цифрам.

Значащую цифру числа a^* называют *верной*, если абсолютная погрешность числа a^* не превышает единицы разряда, соответствующего этой цифре.

Если число a^* имеет ровно N *верных значащих* цифр, то

$$10^{-N-1} \le \bar{\delta}(a^*) \le 10^{-N+1}, \text{ т. е. } \bar{\delta}(a^*) \approx 10^{-N} \text{ или } \bar{\delta}(a^*) \approx \frac{10^{1-N}}{\alpha_m}.$$

Если число верных знаков $N \ge 2$, то $\bar{\delta}(a^*) = \dfrac{10^{1-N}}{2\alpha_m}$.

Для того чтобы число a^* содержало N верных значащих цифр, достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\bar{\delta}(a^*) \le \frac{1}{10^N + 1} \approx 10^{-N}.$$

Правила округления числа:

1) если $(n+1)$-я цифра больше 5, то к n-й цифре прибавляется единица;

2) если $(n+1)$-я цифра меньше 5, то все оставшиеся цифры сохраняются без изменения;

3) если $(n+1)$-я цифра равна 5 и среди отбрасываемых цифр имеются ненулевые, то к n-й цифре прибавляется единица;

4) если $(n+1)$-я цифра равна 5, а все остальные отбрасываемые цифры равны нулю, то n-я сохраняется без изменения, если она четная, и к n-й прибавляется единица, если она нечетная.

Приближенные числа записывают в виде $a = a^* \pm \bar{\Delta}(a^*)$, указывая в записи a^* и $\bar{\Delta}(a^*)$ одинаковое число цифр после запятой. Если число a^* приводится без указания величины погрешности, то принято считать, что все цифры в его записи верные и, следовательно, его погрешность не превосходит единицы разряда последней цифры (единицы «младшего» разряда).

$$\bar{\delta}(a^*) \le \frac{\bar{\Delta}(a^*) \cdot 10^m}{\alpha_m} \le \frac{10^{1-N}}{\alpha_m}.$$

Погрешности арифметических операций

Формула	Предельная абсолютная погрешность $\bar{\Delta}(x^*)$	Предельная относительная погрешность $\bar{\delta}(x^*)$
$x^*=a^*+b^*$, $a>0$, $b>0$	$\bar{\Delta}(x^*)=\bar{\Delta}(a^*)+\bar{\Delta}(b^*)$	$\bar{\delta}(x^*)=\max\{\bar{\delta}(a^*),\ \bar{\delta}(b^*)\}$ или $\bar{\delta}(x^*)=\dfrac{\bar{\Delta}a^*+\bar{\Delta}b^*}{a+b}$

Правило. Чтобы найти сумму нескольких приближенных чисел с различным числом верных значащих цифр, достаточно округлить их так, чтобы каждое из них содержало на одну значащую цифру больше, чем число верных цифр в наименее точном из слагаемых. В сумме следует сохранить столько значащих цифр, сколько верных цифр имеется в наименее точном из слагаемых.

Формула	Предельная абсолютная погрешность $\bar{\Delta}(x^*)$	Предельная относительная погрешность $\bar{\delta}(x^*)$
$x^*=a^*-b^*$, $a>0$, $b>0$	$\bar{\Delta}(x^*)=\bar{\Delta}(a^*)+\bar{\Delta}(b^*)$	$\bar{\delta}(x^*)=\dfrac{\lvert a+b\rvert}{\lvert a-b\rvert}\max\{\bar{\delta}(a^*),\ \bar{\delta}(b^*)\}$ или $\bar{\delta}(x^*)=\dfrac{\bar{\Delta}a^*+\bar{\Delta}b^*}{\lvert a-b\rvert}$, или $\bar{\delta}(x^*)=\bar{\delta}(a^*)+\bar{\delta}(b^*)$

Замечание. Если приближенные числа достаточно близки друг к другу и имеют малые абсолютные погрешности, их разность мала. Тогда предельная относительная погрешность может быть весьма большой, в то время как относительные погрешности уменьшаемого и вычитаемого остаются малыми, т. е. происходит потеря точности.

Правило. При приближенных вычислениях следует по возможности избегать вычитания двух почти равных приближенных чисел; если же в силу необходимости приходится вычитать такие числа, то следует уменьшаемое и вычитаемое брать с достаточным числом запасных верных знаков.

Формула	Предельная абсолютная погрешность $\bar{\Delta}(x^*)$	Предельная относительная погрешность $\bar{\delta}(x^*)$
$x^*=a^*\cdot b^*$ $a>0$, $b>0$	$\bar{\Delta}(x^*\cdot)=b\bar{\Delta}(a^*)+a\bar{\Delta}(b^*)+$ $+\bar{\Delta}(a^*)\cdot\bar{\Delta}(b^*)$	$\bar{\delta}(x^*)=\bar{\delta}(a^*)+\bar{\delta}(b^*)+\bar{\delta}(a^*)\bar{\delta}(b^*)$ или $\bar{\delta}(x^*)=\dfrac{\bar{\Delta}a^*}{a}+\dfrac{\bar{\Delta}b^*}{b}$

Правило. Чтобы найти произведение нескольких приближенных чисел с различным числом верных значащих цифр, достаточно округлить их так, чтобы каждое из них содержало на одну значащую цифру больше, чем число верных цифр в наименее точном из сомножителей. В произведении следует сохранить столько значащих цифр, сколько верных цифр имеется в наименее точном из сомножителей.

Формула	Предельная относительная погрешность $\bar{\delta}(x^*)$
$x^*=(a^*)^n$ $a>0$	$\bar{\delta}(x^*)=n\cdot\bar{\delta}(a^*)$

Правило. При возведении в квадрат или куб приближенного числа в результате нужно сохранять столько значащих цифр, сколько верных значащих цифр имеет основание степени.

Формула	Предельная относительная погрешность $\bar{\delta}(x^*)$
$x^*=\sqrt[n]{a^*}$ $a>0$	$\bar{\delta}(x^*)=\dfrac{\bar{\delta}(a^*)}{n}$

Правило. При извлечении корней из приближенного числа в результате следует брать столько значащих цифр, сколько верных цифр имеет подкоренное число.

Формула	Предельная абсолютная погрешность $\bar{\Delta}(x^*)$	Предельная относительная погрешность $\bar{\delta}(x^*)$
$x^*=\dfrac{a^*}{b^*}$ $a>0,\, b>0$	$\bar{\Delta}\left(\dfrac{a^*}{b^*}\right)=\bar{\Delta}\left(a^*\cdot\dfrac{1}{b^*}\right)\le$ $\le\dfrac{1}{b}\bar{\Delta}(a^*)+a\bar{\Delta}\left(\dfrac{1}{b^*}\right)$	$\bar{\delta}\left(\dfrac{a^*}{b^*}\right)\le\dfrac{\bar{\delta}(a^*)+\bar{\delta}(b^*)}{1-\bar{\delta}(b^*)}$ или $\bar{\delta}(x^*)=\bar{\delta}(a^*)+\bar{\delta}(b^*)$

Правило. При делении приближенных чисел в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим числом верных значащих цифр.

Погрешность вычисления функции

Функция одной переменной $y=f(x)$.

$$\Delta(y^*)\approx|f'(x^*)|\cdot\Delta(x^*),\quad \bar{\delta}(y^*)\approx\frac{|x^*|}{|f(x^*)|}\cdot|f'(x^*)|\cdot\bar{\delta}(x^*).$$

Функция многих переменных $y=f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, $\bar{x}^*=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$.

$$\Delta(y^*)\approx\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial f(\bar{x}^*)}{\partial x_j}\right|\Delta\left(x_j^*\right),\quad \bar{\delta}(y^*)\approx\frac{\bar{\Delta}(y^*)}{|f(\bar{x}^*)|}.$$

Функция двух переменных $y=f(x_1,\ x_2)$, $\bar{x}^*=(x_1,\ x_2)$.

$$\Delta(y^*)\approx\left|\frac{\partial f(\bar{x}^*)}{\partial x_1}\right|\cdot\Delta\left(x_1^*\right)+\left|\frac{\partial f(\bar{x}^*)}{\partial x_2}\right|\cdot\Delta\left(x_2^*\right),\ \ \bar{\delta}(y^*)\approx\frac{\bar{\Delta}(y^*)}{|f(\bar{x}^*)|}.$$

Корень уравнения $f(x)=0$

Метод бисекций. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке локализации $[a;\ b]$, $[a_{n-1},\ b_{n-1}]\subset[a;\ b]$, $x_{n-1}=\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$.

Если $f(x_{n-1})=0$ или $|b_{n-1}-a_{n-1}|<2\varepsilon$, то *вычисления заканчиваются* и $x^*\approx x_{n-1}=\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$.

Если $f(x_{n-1})\neq 0$ и $[a_{n-1},\ b_{n-1}]>2\varepsilon$, то $a_n=a_{n-1}$, $b_n=x_{n-1}$, когда $f(x_{n-1})\cdot f(a_{n-1})<0$ и $a_n=x_{n-1}$, $b_n=b_{n-1}$, когда $f(x_{n-1})\cdot f(a_{n-1})>0$.

Метод простых итераций. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке локализации $[a;\ b]$, $f(a)\cdot f(b)<0$; уравнение $f(x)=0$ преобразовано к виду $x=\varphi(x)$; функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на $[a;\ b]$, все ее значения принадлежат $[a;\ b]$, $|\varphi'(x)|\le q<1$, x_0 из $[a;\ b]$, последовательность $x_n=\varphi(x_{n-1})$ сходится к единственному на $[a;\ b]$ корню $\bar{x}$ уравнения $x=\varphi(x)$ и $|x_n-\bar{x}|<\dfrac{q}{1-q}|x_n-x_{n-1}|$, $\bar{x}\approx x^*=x_n$.

Метод Ньютона. Если $f(a)f(b)<0$, производные $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют знак на $[a,\ b]$, $f'(x_0)f''(x_0)>0$, $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $|\bar{x}-x_n|\le\dfrac{M_2}{2m_1}|x_n-x_{n-1}|^2$, где $M_2=\max\limits_{[a,\ b]}|f''(x)|$, $m_1=\min\limits_{[a,\ b]}|f'(x)|$; итерации прекращаются, если $|x_n-x_{n-1}|\le\sqrt{\dfrac{2m_1}{M_2}\varepsilon}$, $\bar{x}\approx x^*=x_n$.

Решение системы уравнений $f(x)=0$

Число обусловленности матрицы. Пусть $\mathbf{x}$ — точное решение линейной системы $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$, $\mathbf{x}^*=\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}$ — решение системы с возмущенной матрицей $\mathbf{A}^*=\mathbf{A}+\Delta\mathbf{A}$ или возмущенной правой частью: $(\mathbf{A}+\Delta\mathbf{A})(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x})=\mathbf{b}$ или $\mathbf{A}(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x})=\mathbf{b}+\Delta\mathbf{b}$.

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}\|}\le\|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{A}^{-1}\|\cdot\frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}=\mathrm{cond}(\mathbf{A})\frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}$$

или

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}\|}\le\|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{A}^{-1}\|\cdot\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}=\mathrm{cond}(\mathbf{A})\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

Число обусловленности матрицы линейной системы:

$$\mathrm{cond}(\mathbf{A})=\|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{A}^{-1}\|=\frac{M}{m}.$$

Метод простых итераций. Замена исходной системы $\mathbf{f}(\mathbf{x})=0$ эквивалентной ей системой $\mathbf{x}=\Phi(\mathbf{x})$ и построение последовательности $\mathbf{x}^{(k+1)}=\Phi(\mathbf{x}^{(k)})$, сходящейся при $k\to\infty$ к точному решению $\mathbf{x}$ исходной системы. Достаточным условием сходимости метода является условие $|\mathbf{M}|<1$, где $\mathbf{M}=\{M_{ij}\}=\left\{\left|\dfrac{\partial\Phi_i}{\partial x_j}\right|\right\}$, например, $\left(\sum\limits_{i,j=1}^{n}M_{ij}^2\right)^{1/2}<1$. На практике вычисления заканчивают, когда $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}\right)^2}<\varepsilon$, где ε — заданная погрешность вычислений. Тогда полагают $\mathbf{x}\cong\mathbf{x}^*=\mathbf{x}^{(k+1)}$.

Метод Ньютона. Пусть в окрестности решения системы $\mathrm{def}(\mathbf{f}'(\mathbf{x}))\ne 0$ (матрица Якоби обратима) и выбрано некоторое нулевое приближение $\mathbf{x}^{(0)}$. Последовательные приближения решения вычисляются по формуле $\mathbf{x}^{(n+1)}=\mathbf{x}^{(n)}-[\mathbf{f}'(\mathbf{x})]^{-1}\cdot\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(n)})$, $n=0, 1, \ldots$, где $[\mathbf{f}'(\mathbf{x})]^{-1}$ — матрица, обратная к матрице Якоби. Вычисления заканчиваются, когда $\left|\mathbf{x}^{(n+1)}-\mathbf{x}^{(n)}\right|<\sqrt{\varepsilon}$.

Аппроксимация

Метод наименьших квадратов. Функция $y=f(x)$ задана таблицей приближенных значений $\left\{(x_i,\ y_i^*),\ x_i \in [a,\ b],\ y_i^* \approx f(x_i),\ i=0,\ 1,\ \ldots,\ N\right\}$. Линейная модель $y=\Phi_m(x)=$ $=\sum_{i=0}^{m}\alpha_i\varphi_i(x)$, где $\varphi_i(x)$ — заданные базисные функции, например, $\varphi_i(x)=x^i$, а α_i — коэффициенты обобщенного многочлена. Критерий подбора коэффициентов — критерий наименьших квадратов:

$$f(x) \approx s(x;\ \alpha_0,\ \ldots,\ \alpha_m)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\varphi_j(x_i):$$

$$\min\sum_{i=0}^{N}\left(y_i\ {*}-\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\varphi_j(x_i)\right)^2=\sum_{i=0}^{N}\left(y_i^*-s(x_i;\ \alpha_0,\ \ldots,\ \alpha_m)\right)^2.$$

Нормальная система метода наименьших квадратов:

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\alpha_j\left(\sum_{i=0}^{N}\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i)\right)\right)=\sum_{i=0}^{N}y_i^*\varphi_k(x_i),\ \ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Задача интерполяции. По заданной таблице чисел $\{(x_i,\ f(x_i)),\ x_i \in [a,\ b],\ i=0,\ 1,\ \ldots,\ N\}$ найти такую функцию $g(x;\ x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_N)$, что $g(x_i;\ x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_N)=f(x_i)$, $f(x) \approx g(x)$ и $g(x;\ x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_N)\ |f(x)-g(x)| \le \varepsilon$ для $x \in [a,\ b]$. Если функция $g(x;\ x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_N)$ — многочлен, то ее называют *интерполяционным многочленом*. Обобщенный интерполяционный многочлен $\Phi_N(x)=\sum_{i=0}^{N}\alpha_i\varphi_i(x)$ при $\varphi_i(x)=x^i$, называется *интерполяционным многочленом Лагранжа*:

$$L_N(x)=$$
$$=\sum_{i=0}^{N}f(x_i)\frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_N)}{(x_i-x_0)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_N)};$$

$$L_1(x)=f(x_0)\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}+f(x_1)\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)};$$

$$L_2(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} +$$
$$+f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

Безусловная одномерная минимизация функции $y=f(x)$

Метод дихотомии (метод половинного деления):

$$[a_0, b_0]=[a, b],\ [a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k],$$

$$\alpha_k = \frac{a_k + b_k}{2} - \delta, \quad \beta_k = \frac{a_k + b_k}{2} + \delta.$$

Если

$$f(\alpha_k) \le f(\beta_k),$$

то

$$\bar{x} \in [a_k, \beta_k] = [a_{k+1}, b_{k+1}] \text{ и } \bar{x} \approx \bar{x}^*_{k+1} = \alpha_k.$$

Если

$$f(\alpha_k) > f(\beta_k),$$

то

$$\bar{x} \in [\alpha_k, b_k] = [a_{k+1}, b_{k+1}] \text{ и } \bar{x} \approx \bar{x}^*_{k+1} = \beta_k.$$

Вычисления заканчиваются при $\Delta_k = |b_k - a_k| < \varepsilon$.

Метод золотого сечения:

$$[a_0, b_0]=[a, b],\ [a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k],$$

$$\Delta_k = b_k - a_k,$$

$$\alpha_k = a_k + \frac{2}{3+\sqrt{5}}\Delta_k, \quad \beta_k = a_k + \frac{2}{1+\sqrt{5}}\Delta_k.$$

Если

$$f(\alpha_k) \le f(\beta_k),$$

то

$$\bar{x} \in [a_k, \beta_k] = [a_{k+1}, b_{k+1}] \text{ и } \bar{x} \approx \bar{x}^*_{k+1} = \alpha_k.$$

Если

$$f(\alpha_k) > f(\beta_k),$$

то

$$\bar{x} \in [\alpha_k,\ b_k] = [a_{k+1},\ b_{k+1}] \text{ и } \bar{x} \approx \bar{x}^*_{k+1} = \beta_k.$$

Вычисления заканчиваются при $\Delta_k < \varepsilon$.

Вычисление интеграла:

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Простейшие квадратурные формулы

Формула прямоугольников:

$$I \approx I_{\text{пр}} = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right);$$

$$R_{\text{пр}} = \left|I - I_{\text{пр}}\right| \le \frac{M_2}{24}(b-a)^3.$$

Формула трапеций:

$$I \approx I_{\text{тр}} = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2};$$

$$R_{\text{тр}} = \left|I - I_{\text{тр}}\right| \le \frac{M_2}{12}(b-a)^3.$$

Формула Симпсона:

$$I \approx I_{\text{Симпс}} = \frac{(b-a)}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right);$$

$$R_{\text{Симпс}} = \left|I - I_{\text{Симпс}}\right| \le \frac{M_4}{2880}(b-a)^5.$$

Составные формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона

Отрезок $[a, b]$ точками $x_i = a + ih$ разбит на четное число $n = 2m$ отрезков длины $h = \dfrac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Составная формула прямоугольников:

$$I = I_{\text{пр}} + R_{\text{пр}} = h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + \frac{h^2}{24}M_2(b-a).$$

Составная формула трапеций:

$$I = I_{\text{тр}} + R_{\text{тр}} = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right) + \frac{h^2}{12}M_2(b-a).$$

Составная формула Симпсона:

$$I = I_{\text{Симпс}} + R_{\text{Симпс}} =$$
$$= \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{m-1}\left(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\right) + \frac{h^4}{2880}M_4(b-a).$$

Оценка погрешности квадратурных формул по правилу Рунге

Уточненная формула прямоугольников:

$$I_{\text{пр}} = I_{h/2} + \frac{I_{h/2} - I_h}{3}.$$

Уточненная формула трапеций:

$$I_{\text{тр}} = I_{h/2} - \frac{I_{h/2} - I_h}{3}.$$

Уточненная формула Симпсона:

$$I_{\text{Симпс}} = I_{h/2} - \frac{I_{h/2} - I_h}{15}.$$

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Вектор $\bar{Y}(x)$ является решением задачи Коши:

$$\bar{Y}' = \bar{F}(x,\ \bar{Y}),\ \ \bar{Y}(x_0) = \bar{Y}_0.$$

Здесь

$$\bar{Y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}; \qquad \bar{Y}(x_j) = \begin{pmatrix} y_1(x_j) \\ y_2(x_j) \\ \dots \\ y_n(x_j) \end{pmatrix};$$

$$\bar{Y}'(x)=\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \dots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}; \qquad \bar{F}(x,\ \bar{Y})=\begin{pmatrix} f_1(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n) \\ f_2(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n) \\ \dots \\ f_n(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n) \end{pmatrix}.$$

Метод Эйлера. $y'=f(x,\ y)$, $y(x_0)=y_0$. Тогда

$$y_{i+1}=y_i+hf(x_i,\ y_i).$$

Метод Рунге — Кутты. $y'=f(x,\ y)$, $y(x_0)=y_0$. Тогда величины y_{i+1} вычисляются по формулам:

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4);$$
$$k_1=f(x_i,\ y_i);$$
$$k_2=f\left(x_i+\frac{h}{2},\ y_i+\frac{h}{2}k_1\right);$$
$$k_3=f\left(x_i+\frac{h}{2},\ y_i+\frac{h}{2}k_2\right),$$
$$k_4=f(x_i+h,\ y_i+hk_3).$$

Оценка погрешности по правилу Рунге. Проводят вычисления с шагом h и с шагом $h/2$. За оценку погрешности решения, вычисленного с шагом $h/2$, принимается величина $\max\limits_i \dfrac{\left|y_{2i}^{(h/2)}-y_i^{(h)}\right|}{15}$, где $y_i^{(h)}$ — значение, вычисленное с шагом h, а $y_{2i}^{(h/2)}$ — с шагом $h/2$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/3} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,28	0,1103	0,56	0,2123	0,84	0,2995
0,01	0,0040	0,29	0,1141	0,57	0,2157	0,85	0,3023
0,02	0,0080	0,30	0,1179	0,58	0,2190	0,86	0,3051
0,03	0,0120	0,31	0,1217	0,59	0,2224	0,87	0,3078
0,04	0,0160	0,32	0,1255	0,60	0,2257	0,88	0,3106
0,05	0,0199	0,33	0,1293	0,61	0,2291	0,89	0,3133
0,06	0,0239	0,34	0,1331	0,62	0,2324	0,90	0,3159
0,07	0,0279	0,35	0,1368	0,63	0,2357	0,91	0,3186
0,08	0,0319	0,36	0,1406	0,64	0,2389	0,92	0,3212
0,09	0,0359	0,37	0,1443	0,65	0,2422	0,93	0,3238
0,10	0,0398	0,38	0,1480	0,66	0,2454	0,94	0,3264
0,11	0,0438	0,39	0,1517	0,67	0,2486	0,95	0,3289
0,12	0,0478	0,40	0,1554	0,68	0,2517	0,96	0,3315
0,13	0,0517	0,41	0,1591	0,69	0,2549	0,97	0,3340
0,14	0,0557	0,42	0,1628	0,70	0,2580	0,98	0,3365
0,15	0,0596	0,43	0,1664	0,71	0,2611	0,99	0,3389
0,16	0,0636	0,44	0,1700	0,72	0,2642	1,00	0,3413
0,17	0,0675	0,45	0,1736	0,73	0,2673	1,01	0,3438
0,18	0,0714	0,46	0,1772	0,74	0,2703	1,02	0,3461
0,19	0,0753	0,47	0,1808	0,75	0,2734	1,03	0,3485
0,20	0,0793	0,48	0,1844	0,76	0,2764	1,04	0,3508
0,21	0,0832	0,49	0,1879	0,77	0,2794	1,05	0,3531
0,22	0,0871	0,50	0,1915	0,78	0,2823	1,06	0,3554
0,23	0,0910	0,51	0,1950	0,79	0,2852	1,07	0,3577
0,24	0,0948	0,52	0,1985	0,80	0,2881	1,08	0,3599
0,25	0,0987	0,53	0,2019	0,81	0,2910	1,09	0,3621
0,26	0,1026	0,54	0,2054	0,82	0,2939	1,10	0,3643
0,27	0,1064	0,55	0,2088	0,83	0,2967	1,11	0,3665

Продолжение табл.

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,12	0,3686	1,49	0,4319	1,86	0,4686	2,46	0,4931
1,13	0,3708	1,50	0,4332	1,87	0,4693	2,48	0,4934
1,14	0,3729	1,51	0,4345	1,88	0,4699	2,50	0,4938
1,15	0,3749	1,52	0,4357	1,89	0,4706	2,52	0,4941
1,16	0,3770	1,53	0,4370	1,90	0,4713	2,54	0,4945
1,17	0,3790	1,54	0,4,382	1,91	0,4719	2,56	0,4948
1,18	0,3810	1,55	0,4394	1,92	0,4726	2,58	0,4951
1,19	0,3830	1,56	0,4406	1,93	0,4732	2,60	0,4953
1,20	0,3849	1,57	0,4418	1,94	0,4738	2,62	0,4956
1,21	0,3869	1,58	0,4429	1,95	0,4744	2,64	0,4959
1,22	0,3883	1,59	0,4441	1,96	0,4750	2,66	0,4961
1,23	0,3907	1,60	0,4452	1,97	0,4756	2,68	0,4963
1,24	0,3925	1,61	0,4463	1,98	0,4761	2,70	0,4965
1,25	0,3944	1,62	0,4474	1,99	0,4767	2,72	0,4967
1,26	0,3962	1,33	0,4484	2,00	0,4772	2,74	0,4969
1,27	0,3980	1,64	0,4495	2,02	0,4783	2,76	0,4971
1,28	0,3997	1,65	0,4505	2,04	0,4793	2,78	0,4973
1,29	0,4015	1,60	0,4515	2,06	0,4803	2,80	0,4974
1,30	0,4032	1,67	0,4525	2,08	0,4812	2,82	0,4976
1,31	0,4049	1,68	0,4535	2,10	0,4821	2,84	0,4977
1,32	0,4066	1,69	0,4545	2,12	0,4830	2,86	0,4979
1,33	0,4082	1,70	0,4554	2,14	0,4838	2,88	0,4980
1,34	0,4099	1,71	0,45641	2,16	0,4846	2,90	0,4981
1,35	0,4115	1,72	0,4573	2,18	0,4854	2,92	0,4982
1,36	0,4131	1,73	0,4582	2,20	0,4861	2,94	0,4984
1,37	0,4147	1,74	0,4591	2,22	0,4868	2,96	0,4985
1,38	0,4162	1,75	0,4599	2,24	0,4875	2,98	0,4985
1,39	0,4177	1,76	0,4608	2,26	0,4881	3,00	0,49865
1,40	0,4192	1,77	0,4616	2,28	0,4887	3,20	0,49931
1,41	0,4207	1,78	0,4625	2,30	0,4893	3,40	0,49966
1,42	0,4222	1,79	0,4633	2,32	0,4898	3,60	0,499841
1,43	0,4230	1,80	0,4641	2,34	0,4904	3,80	0,499928
1,44	0,4251	1,81	0,4649	2,36	0,4909	4,00	0,499968
1,45	0,4265	1,82	0,4656	2,38	0,4913	4,50	0,499997
1,46	0,4279	1,83	0,4664	2,40	0,4918	5,00	0,499997
1,47	0,4292	1,84	0,4671	2,42	0,4922		
1,48	0,4305	1,85	0,4678	2,44	0,4927		

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3698
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551

Продолжение табл.

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0395	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0353	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001

Приближенные значения факториала

n	11	12	13	14	15
***n*!**	39916800	479001600	6227020800	87178291200	1307674368000
n	16	17	18	19	20
***n*!**	20922789888000	355687428096000	6402373705728000	121645100408832000	2,4329E+18
n	21	22	23	24	25
***n*!**	5,10909E+19	1,124E+21	2,5852E+22	6,20448E+23	1,55112E+25
n	26	27	28	29	30
***n*!**	4,03291E+26	1,08889E+28	3,04888E+29	8,84176E+30	2,65253E+32
n	31	32	33	34	35
***n*!**	8,22284E+33	2,63131E+35	8,68332E+36	2,95233E+38	1,03331E+40
n	36	37	38	39	40
***n*!**	3,71993E+41	1,37638E+43	5,23023E+44	2,03979E+46	8,15915E+47
n	41	42	43	44	45
***n*!**	3,34525E+49	1,40501E+51	6,04153E+52	2,65827E+54	1,19622E+56
n	46	47	48	49	50
***n*!**	5,50262E+57	2,58623E+59	1,24139E+61	6,08282E+62	3,04141E+64
n	51	52	53	54	55
***n*!**	1,55112E+66	8,06582E+67	4,27488E+69	2,30844E+71	1,26964E+73
n	56	57	58	59	60
***n*!**	7,10999E+74	4,05269E+76	2,35056E+78	1,38683E+80	8,32099E+81

Биномиальные коэффициенты $C_n^k = \binom{n}{k} = C_n^{n-k}$

n \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	10	45	120	210	252					
11	11	55	165	330	462					
12	12	66	220	495	792	924				
13	13	78	286	715	1287	1716				
14	14	91	364	1001	2002	3003	3432			
15	15	105	455	1365	3003	5005	6435			
16	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870		
17	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310		
18	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	
19	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	
20	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756
21	21	210	1330	5985	20349	54264	116280	203490	293930	352716
22	22	231	1540	7315	26334	74613	170544	319770	497420	646646
23	23	253	1771	8855	33649	100947	245157	490314	817190	1144066
24	24	276	2024	10626	42504	134596	346104	735471	1307504	1961256
25	25	300	2300	12650	53130	177100	480700	1081575	2042975	3268760
26	26	325	2600	14950	65780	230230	657800	1562275	3124550	5311735
27	27	351	2925	17550	80730	296010	888030	2220075	4686825	8436285

28	28	378	3276	20475	98280	376740	1184040	3108105	6906900	13123110
29	29	406	3654	23751	118755	475020	1560780	4292145	10015005	20030010
30	30	435	4060	27405	142506	593775	2035800	5852925	14307150	30045015
31	31	465	4495	31465	169911	736281	2629575	7888725	20160075	44352165
32	32	496	4960	35960	201376	906192	3365856	10518300	28048800	64512240
33	33	528	5456	40920	237336	1107568	4272048	13884156	38567100	92561040
34	34	561	5984	46376	278256	1344904	5379616	18156204	52451256	1,31E+08
35	35	595	6545	52360	324632	1623160	6724520	23535820	70607460	1,84E+08
36	36	630	7140	58905	376992	1947792	8347680	30260340	94143280	2,54E+08
37	37	666	7770	66045	435897	2324784	10295472	38608020	1,24E+08	3,48E+08
38	38	703	8436	73815	501942	2760681	12620256	48903492	1,63E+08	4,73E+08
39	39	741	9139	82251	575757	3262623	15380937	61523748	2,12E+08	6,36E+08
40	40	780	9880	91390	658008	3838380	18643560	76904685	2,73E+08	8,48E+08
41	41	820	10660	101270	749398	4496388	22481940	95548245	3,5E+08	1,12E+09
42	42	861	11480	111930	850668	5245786	26978328	1,18E+08	4,46E+08	1,47E+09
43	43	903	12341	123410	962598	6096454	32224114	1,45E+08	5,64E+08	1,92E+09
44	44	946	13244	135751	1086008	7059052	38320568	1,77E+08	7,09E+08	2,48E+09
45	45	990	14190	148995	1221759	8145060	45379620	2,16E+08	8,86E+08	3,19E+09
46	46	1035	15180	163185	1370754	9366819	53524680	2,61E+08	1,1E+09	4,08E+09
47	47	1081	16215	178365	1533939	10737573	62891499	3,14E+08	1,36E+09	5,18E+09
48	48	1128	17296	194580	1712304	12271512	73629072	3,77E+08	1,68E+09	6,54E+09
49	49	1176	18424	211876	1906884	13983816	85900584	4,51E+08	2,05E+09	8,22E+09
50	50	1225	19600	230300	2118760	15890700	99884400	5,37E+08	2,51E+09	1,03E+10

Продолжение табл.

n \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
51	51	1275	20825	249900	2349060	18009460	1,16E+08	6,37E+08	3,04E+09	1,28E+10
52	52	1326	22100	270725	2598960	20358520	1,34E+08	7,53E+08	3,68E+09	1,58E+10
53	53	1378	23426	292825	2869685	22957480	1,54E+08	8,86E+08	4,43E+09	1,95E+10
54	54	1431	24804	316251	3162510	25827165	1,77E+08	1,04E+09	5,32E+09	2,39E+10
55	55	1485	26235	341055	3478761	28989675	2,03E+08	1,22E+09	6,36E+09	2,92E+10
56	56	1540	27720	367290	3819816	32468436	2,32E+08	1,42E+09	7,58E+09	3,56E+10
57	57	1596	29260	395010	4187106	36288252	2,64E+08	1,65E+09	9E+09	4,32E+10
58	58	1653	30856	424270	4582116	40475358	3,01E+08	1,92E+09	1,06E+10	5,22E+10
59	59	1711	32509	455126	5006386	45057474	3,41E+08	2,22E+09	1,26E+10	6,28E+10
60	60	1770	34220	487635	5461512	50063860	3,86E+08	2,56E+09	1,48E+10	7,54E+10

n \ k	11	12	13	14	15	16	17	18
22	705432	646646	497420	319770	170544	74613	26334	7315
23	1352078	1352078	1144066	817190	490314	245157	100947	33649
24	2496144	2704156	2496144	1961256	1307504	735471	346104	134596
25	4457400	5200300	5200300	4457400	3268760	2042975	1081575	480700
26	7726160	9657700	10400600	9657700	7726160	5311735	3124550	1562275
27	13037895	17383860	20058300	20058300	17383860	13037895	8436285	4686825
28	21474180	30421755	37442160	40116600	37442160	30421755	21474180	13123110
29	34597290	51895935	67863915	77558760	77558760	67863915	51895935	34597290

30	54627300	86493225	1,2E+08	1,45E+08	1,55E+08	1,45E+08	1,2E+08	86493225
31	84672315	1,41E+08	2,06E+08	2,65E+08	3,01E+08	3,01E+08	2,65E+08	2,06E+08
32	1,29E+08	2,26E+08	3,47E+08	4,71E+08	5,66E+08	6,01E+08	5,66E+08	4,71E+08
33	1,94E+08	3,55E+08	5,73E+08	8,19E+08	1,04E+09	1,17E+09	1,17E+09	1,04E+09
34	2,86E+08	5,48E+08	9,28E+08	1,39E+09	1,86E+09	2,2E+09	2,33E+09	2,2E+09
35	4,17E+08	8,34E+08	1,48E+09	2,32E+09	3,25E+09	4,06E+09	4,54E+09	4,54E+09
36	6,01E+08	1,25E+09	2,31E+09	3,8E+09	5,57E+09	7,31E+09	8,6E+09	9,08E+09
37	8,55E+08	1,85E+09	3,56E+09	6,11E+09	9,36E+09	1,29E+10	1,59E+10	1,77E+10
38	1,2E+09	2,71E+09	5,41E+09	9,67E+09	1,55E+10	2,22E+10	2,88E+10	3,36E+10
39	1,68E+09	3,91E+09	8,12E+09	1,51E+10	2,51E+10	3,77E+10	5,1E+10	6,24E+10
40	2,31E+09	5,59E+09	1,2E+10	2,32E+10	4,02E+10	6,29E+10	8,87E+10	1,13E+11
41	3,16E+09	7,9E+09	1,76E+10	3,52E+10	6,34E+10	1,03E+11	1,52E+11	2,02E+11
42	4,28E+09	1,11E+10	2,55E+10	5,29E+10	9,87E+10	1,67E+11	2,55E+11	3,54E+11
43	5,75E+09	1,53E+10	3,66E+10	7,84E+10	1,52E+11	2,65E+11	4,21E+11	6,08E+11
44	7,67E+09	2,11E+10	5,19E+10	1,15E+11	2,3E+11	4,17E+11	6,86E+11	1,03E+12
45	1,02E+10	2,88E+10	7,3E+10	1,67E+11	3,45E+11	6,47E+11	1,1E+12	1,72E+12
46	1,33E+10	3,89E+10	1,02E+11	2,4E+11	5,12E+11	9,91E+11	1,75E+12	2,82E+12
47	1,74E+10	5,23E+10	1,41E+11	3,42E+11	7,52E+11	1,5E+12	2,74E+12	4,57E+12
48	2,26E+10	6,97E+10	1,93E+11	4,82E+11	1,09E+12	2,25E+12	4,24E+12	7,31E+12
49	2,91E+10	9,23E+10	2,63E+11	6,75E+11	1,58E+12	3,35E+12	6,5E+12	1,16E+13
50	3,74E+10	1,21E+11	3,55E+11	9,38E+11	2,25E+12	4,92E+12	9,85E+12	1,81E+13
51	4,76E+10	1,59E+11	4,76E+11	1,29E+12	3,19E+12	7,17E+12	1,48E+13	2,79E+13
52	6,04E+10	2,06E+11	6,35E+11	1,77E+12	4,48E+12	1,04E+13	2,19E+13	4,27E+13

Продолжение табл.

n \ k	11	12	13	14	15	16	17	18
53	7,62E+10	2,67E+11	8,41E+11	2,4E+12	6,25E+12	1,48E+13	3,23E+13	6,46E+13
54	9,57E+10	3,43E+11	1,11E+12	3,25E+12	8,65E+12	2,11E+13	4,72E+13	9,69E+13
55	1,2E+11	4,39E+11	1,45E+12	4,35E+12	1,19E+13	2,97E+13	6,82E+13	1,44E+14
56	1,49E+11	5,58E+11	1,89E+12	5,8E+12	1,63E+13	4,16E+13	9,8E+13	2,12E+14
57	1,85E+11	7,07E+11	2,45E+12	7,69E+12	2,21E+13	5,79E+13	1,4E+14	3,1E+14
58	2,28E+11	8,92E+11	3,16E+12	1,01E+13	2,98E+13	8E+13	1,98E+14	4,5E+14
59	2,8E+11	1,12E+12	4,05E+12	1,33E+13	3,99E+13	1,1E+14	2,78E+14	6,48E+14
60	3,43E+11	1,4E+12	5,17E+12	1,73E+13	5,32E+13	1,5E+14	3,87E+14	9,25E+14

n \ k	19	20	21	22	23	24	25	26
30	54627300	30045015	14307150	5852925	2035800	593775	142506	27405
31	1,41E+08	84672315	44352165	20160075	7888725	2629575	736281	169911
32	3,47E+08	2,26E+08	1,29E+08	64512240	28048800	10518300	3365856	906192
33	8,19E+08	5,73E+08	3,55E+08	1,94E+08	92561040	38567100	13884156	4272048
34	1,86E+09	1,39E+09	9,28E+08	5,48E+08	2,86E+08	1,31E+08	52451256	18156204
35	4,06E+09	3,25E+09	2,32E+09	1,48E+09	8,34E+08	4,17E+08	1,84E+08	70607460
36	8,6E+09	7,31E+09	5,57E+09	3,8E+09	2,31E+09	1,25E+09	6,01E+08	2,54E+08
37	1,77E+10	1,59E+10	1,29E+10	9,36E+09	6,11E+09	3,56E+09	1,85E+09	8,55E+08
38	3,53E+10	3,36E+10	2,88E+10	2,22E+10	1,55E+10	9,67E+09	5,41E+09	2,71E+09
39	6,89E+10	6,89E+10	6,24E+10	5,1E+10	3,77E+10	2,51E+10	1,51E+10	8,12E+09

40	1,31E+11	1,38E+11	1,31E+11	1,13E+11	8,87E+10	6,29E+10	4,02E+10	2,32E+10
41	2,45E+11	2,69E+11	2,69E+11	2,45E+11	2,02E+11	1,52E+11	1,03E+11	6,34E+10
42	4,47E+11	5,14E+11	5,38E+11	5,14E+11	4,47E+11	3,54E+11	2,55E+11	1,67E+11
43	8E+11	9,61E+11	1,05E+12	1,05E+12	9,61E+11	8E+11	6,08E+11	4,21E+11
44	1,41E+12	1,76E+12	2,01E+12	2,1E+12	2,01E+12	1,76E+12	1,41E+12	1,03E+12
45	2,44E+12	3,17E+12	3,77E+12	4,12E+12	4,12E+12	3,77E+12	3,17E+12	2,44E+12
46	4,15E+12	5,61E+12	6,94E+12	7,89E+12	8,23E+12	7,89E+12	6,94E+12	5,61E+12
47	6,97E+12	9,76E+12	1,26E+13	1,48E+13	1,61E+13	1,61E+13	1,48E+13	1,26E+13
48	1,15E+13	1,67E+13	2,23E+13	2,74E+13	3,1E+13	3,22E+13	3,1E+13	2,74E+13
49	1,89E+13	2,83E+13	3,9E+13	4,97E+13	5,83E+13	6,32E+13	6,32E+13	5,83E+13
50	3,04E+13	4,71E+13	6,73E+13	8,87E+13	1,08E+14	1,22E+14	1,26E+14	1,22E+14
51	4,85E+13	7,75E+13	1,14E+14	1,56E+14	1,97E+14	2,3E+14	2,48E+14	2,48E+14
52	7,64E+13	1,26E+14	1,92E+14	2,71E+14	3,53E+14	4,26E+14	4,78E+14	4,96E+14
53	1,19E+14	2,02E+14	3,18E+14	4,63E+14	6,23E+14	7,79E+14	9,04E+14	9,73E+14
54	1,84E+14	3,21E+14	5,2E+14	7,81E+14	1,09E+15	1,4E+15	1,68E+15	1,88E+15
55	2,81E+14	5,05E+14	8,42E+14	1,3E+15	1,87E+15	2,49E+15	3,09E+15	3,56E+15
56	4,25E+14	7,86E+14	1,35E+15	2,14E+15	3,17E+15	4,36E+15	5,57E+15	6,65E+15
57	6,37E+14	1,21E+15	2,13E+15	3,49E+15	5,31E+15	7,52E+15	9,93E+15	1,22E+16
58	9,47E+14	1,85E+15	3,34E+15	5,62E+15	8,8E+15	1,28E+16	1,75E+16	2,22E+16
59	1,4E+15	2,79E+15	5,19E+15	8,96E+15	1,44E+16	2,16E+16	3,03E+16	3,96E+16
60	2,04E+15	4,19E+15	7,98E+15	1,42E+16	2,34E+16	3,61E+16	5,19E+16	6,99E+16

Продолжение табл.

n \ k	27	28	29	30
30	4060	435	30	1
31	31465	4495	465	31
32	201376	35960	4960	496
33	1107568	237336	40920	5456
34	5379616	1344904	278256	46376
35	23535820	6724520	1623160	324632
36	94143280	30260340	8347680	1947792
37	3,48E+08	1,24E+08	38608020	10295472
38	1,2E+09	4,73E+08	1,63E+08	48903492
39	3,91E+09	1,68E+09	6,36E+08	2,12E+08
40	1,2E+10	5,59E+09	2,31E+09	8,48E+08
41	3,52E+10	1,76E+10	7,9E+09	3,16E+09
42	9,87E+10	5,29E+10	2,55E+10	1,11E+10
43	2,65E+11	1,52E+11	7,84E+10	3,66E+10
44	6,86E+11	4,17E+11	2,3E+11	1,15E+11
45	1,72E+12	1,1E+12	6,47E+11	3,45E+11
46	4,15E+12	2,82E+12	1,75E+12	9,91E+11
47	9,76E+12	6,97E+12	4,57E+12	2,74E+12
48	2,23E+13	1,67E+13	1,15E+13	7,31E+12
49	4,97E+13	3,9E+13	2,83E+13	1,89E+13
50	1,08E+14	8,87E+13	6,73E+13	4,71E+13
51	2,3E+14	1,97E+14	1,56E+14	1,14E+14
52	4,78E+14	4,26E+14	3,53E+14	2,71E+14
53	9,73E+14	9,04E+14	7,79E+14	6,23E+14
54	1,95E+15	1,88E+15	1,68E+15	1,4E+15
55	3,82E+15	3,82E+15	3,56E+15	3,09E+15
56	7,38E+15	7,65E+15	7,38E+15	6,65E+15
57	1,4E+16	1,5E+16	1,5E+16	1,4E+16
58	2,63E+16	2,91E+16	3,01E+16	2,91E+16
59	4,84E+16	5,53E+16	5,91E+16	5,91E+16
60	8,8E+16	1,04E+17	1,14E+17	1,18E+17

Таблица распределения Пуассона $P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

k / λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1	1,5	2
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812	0,449329	0,367879	0,22313	0,135335
1	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287	0,359463	0,367879	0,334695	0,270671
2	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786	0,143785	0,18394	0,251021	0,270671
3	0,000151	0,001092	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757	0,038343	0,061313	0,125511	0,180447
4	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964	0,007669	0,015328	0,047067	0,090224
5	0	0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356	0,001227	0,003066	0,014120	0,036089
6	0	0	0,000001	0,000004	0,000013	0,000036	0,000164	0,000511	0,003530	0,012030
7	0	0	0	0	0,000001	0,000003	0,000019	0,000073	0,000756	0,003437
8	0	0	0	0	0	0	0,000002	0,000009	0,000142	0,000859
9	0	0	0	0	0	0	0	0,000001	0,000024	0,000191
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000004	0,000038
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000007
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000001
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

k / λ	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
0	0,082085	0,049787	0,030197	0,018316	0,011109	0,006738	0,004087	0,002479	0,001503	0,000912
1	0,205212	0,149361	0,105691	0,073263	0,04999	0,033690	0,022477	0,014873	0,009772	0,006383
2	0,256516	0,224042	0,184959	0,146525	0,112479	0,084224	0,061812	0,044618	0,03176	0,022341
3	0,213763	0,224042	0,215785	0,195367	0,168718	0,140374	0,113323	0,089235	0,068814	0,052129

Продолжение табл.

λ \ k	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
4	0,133602	0,168031	0,188812	0,195367	0,189808	0,175467	0,155819	0,133853	0,111822	0,091226
5	0,066801	0,100819	0,132169	0,156293	0,170827	0,175467	0,171401	0,160623	0,145369	0,127717
6	0,027834	0,050409	0,077098	0,104196	0,12812	0,146223	0,157117	0,160623	0,157483	0,149003
7	0,009941	0,021604	0,038549	0,059540	0,082363	0,104445	0,123449	0,137677	0,146234	0,149003
8	0,003106	0,008102	0,016865	0,029770	0,046329	0,065278	0,084871	0,103258	0,118815	0,130377
9	0,000863	0,002701	0,006559	0,013231	0,023165	0,036266	0,051866	0,068838	0,085811	0,101405
10	0,000216	0,00081	0,002296	0,005292	0,010424	0,018133	0,028526	0,041303	0,055777	0,070983
11	0,000049	0,000221	0,000730	0,001925	0,004264	0,008242	0,014263	0,022529	0,032959	0,045171
12	0,000010	0,000055	0,000213	0,000642	0,001599	0,003434	0,006537	0,011264	0,017853	0,026350
13	0,000002	0,000013	0,000057	0,000197	0,000554	0,001321	0,002766	0,005199	0,008926	0,014188
14	0	0,000003	0,000014	0,000056	0,000178	0,000472	0,001087	0,002228	0,004144	0,007094
15	0	0,000001	0,000003	0,000015	0,000053	0,000157	0,000398	0,000891	0,001796	0,003311
16	0	0	0,000001	0,000004	0,000015	0,000049	0,000137	0,000334	0,00073	0,001448
17	0	0	0	0,000001	0,000004	0,000014	0,000044	0,000118	0,000279	0,000596
18	0	0	0	0	0,000001	0,000004	0,000014	0,000039	0,000101	0,000232
19	0	0	0	0	0	0,000001	0,000004	0,000012	0,000034	0,000085
20	0	0	0	0	0	0	0,000001	0,000004	0,000011	0,00003
21	0	0	0	0	0	0	0	0,000001	0,000003	0,000010
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000001	0,000003
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000001
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица случайных точек $M(x, y)$ (случайных чисел)

Номер точки	x	y	Номер точки	x	y	Номер точки	x	y
1	0,57	0,34	37	0,51	0,70	73	0,00	0,36
2	0,41	0,85	38	0,89	0,60	74	0,33	0,88
3	0,07	0,29	39	0,37	0,84	75	0,14	0,95
4	0,70	0,32	40	0,98	0,96	76	0,60	0,94
5	0,74	0,28	41	0,15	0,22	77	0,76	0,80
6	0,58	0,15	42	0,14	0,41	78	0,90	0,01
7	0,46	0,55	43	0,19	0,34	79	0,10	0,18
8	0,09	0,93	44	0,15	0,49	80	0,81	0,65
9	0,59	0,50	45	0,83	0,36	81	0,08	0,06
10	0,99	0,66	46	0,85	0,38	82	0,15	0,82
11	0,27	0,36	47	0,93	0,36	83	0,40	0,93
12	0,86	0,68	48	0,57	0,08	84	0,28	0,91
13	0,13	0,64	49	0,70	0,38	85	0,58	0,11
14	0,14	0,43	50	0,17	0,74	86	0,80	0,41
15	0,08	0,35	51	0,16	0,31	87	0,43	0,99
16	0,82	0,33	52	0,39	0,21	88	0,36	0,70
17	0,93	0,92	53	0,46	0,85	89	0,65	0,09
18	0,39	0,89	54	0,50	0,14	90	0,03	0,05
19	0,39	0,14	55	0,39	0,07	91	0,68	0,07
20	0,02	0,15	56	0,45	0,83	92	0,81	0,38
21	0,24	0,28	57	0,48	0,13	93	0,43	0,08
22	0,65	0,13	58	0,59	0,80	94	0,09	0,28
23	0,66	0,67	59	0,39	0,12	95	0,02	0,90
24	0,64	0,96	60	0,12	0,26	96	0,68	0,69
25	0,30	0,92	61	0,47	0,69	97	0,03	0,79
26	0,63	0,43	62	0,32	0,01	98	0,59	0,03
27	0,92	0,56	63	0,94	0,86	99	0,89	0,25
28	0,81	0,05	64	0,22	0,19	100	0,33	0,07
29	0,41	0,03	65	0,77	0,95	101	0,58	0,39
30	0,80	0,41	66	0,86	0,23	102	0,30	0,62
31	0,38	0,19	67	0,68	0,90	103	0,36	0,63
32	0,26	0,80	68	0,51	0,78	104	0,32	0,62
33	0,72	0,09	69	0,18	0,46	105	0,72	0,12
34	0,92	0,03	70	0,44	0,99	106	0,42	0,55
35	0,45	0,99	71	0,32	0,24	107	0,92	0,20
36	0,82	0,23	72	0,76	0,59	108	0,63	0,96

Продолжение табл.

Номер точки	x	y	Номер точки	x	y	Номер точки	x	y
109	0,73	0,31	140	0,38	0,87	171	0,65	0,51
110	0,55	0,57	141	0,12	0,21	172	0,12	0,61
111	0,37	0,06	142	0,34	0,12	173	0,20	0,59
112	0,63	0,43	143	0,25	0,69	174	0,16	0,44
113	0,45	0,42	144	0,70	0,04	175	0,54	0,25
114	0,82	0,40	145	0,60	0,19	176	0,05	0,13
115	0,07	0,80	146	0,80	0,34	177	0,79	0,69
116	0,33	0,77	147	0,48	0,68	178	0,46	0,57
117	0,72	0,90	148	0,41	0,95	179	0,28	0,76
118	0,64	0,22	149	0,23	0,04	180	0,04	0,08
119	0,05	0,41	150	0,98	0,87	181	0,39	0,56
120	0,19	0,77	151	0,85	0,35	182	0,61	0,67
121	0,18	0,66	152	0,05	0,05	183	0,86	0,50
122	0,26	0,79	153	0,61	0,57	184	0,68	0,21
123	0,98	0,34	154	0,78	0,54	185	0,82	0,12
124	0,89	0,13	155	0,77	0,07	186	0,68	0,67
125	0,67	0,88	156	0,90	0,71	187	0,53	0,92
126	0,38	0,30	157	0,95	0,41	188	0,24	0,51
127	0,32	0,17	158	0,68	0,48	189	0,70	0,75
128	0,20	0,51	159	0,28	0,37	190	0,09	0,19
129	0,14	0,52	160	0,14	0,07	191	0,23	0,86
130	0,51	0,46	161	0,04	0,73	192	0,05	0,35
131	0,12	0,11	162	0,90	0,53	193	0,94	0,90
132	0,74	0,59	163	0,85	0,91	194	0,48	0,52
133	0,61	0,94	164	0,21	0,60	195	0,18	0,58
134	0,76	0,23	165	0,41	0,55	196	0,23	0,30
135	0,54	0,44	166	0,40	0,71	197	0,14	0,32
136	0,94	0,60	167	0,88	0,32	198	0,12	0,08
137	0,94	0,93	168	0,27	0,22	199	0,40	0,70
138	0,75	0,11	169	0,65	0,38	200	0,13	0,42
139	0,96	0,67	170	0,69	0,86			

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амосов*, *А. А.* Вычислительные методы для инженеров / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н. В. Копченова. — М. : Высшая школа, 1994.
2. *Бараненков*, *А. И*. Сборник задач и типовых расчетов по высшей математике : учеб. пособие / А. И. Бараненков, Е. П. Богомолова, И. М. Петрушко. — СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2009.
3. *Берман*, *Г. Н*. Сборник задач по курсу математического анализа. — СПб. : Профессия, 2001.
4. *Бугров*, *Я. С*. Высшая математика : в 3-х т. / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — М. : Дрофа, 2004.
5. *Гмурман*, *В. Е*. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. — М. : Высшая школа, 2004.
6. *Зимина*, *О. В*. Практические занятия по высшей математике с использованием мобильного доступа к математическому серверу МЭИ : учеб. пособие для вузов / О. В. Зимина, А. И. Кириллов. — М. : Издательский дом МЭИ, 2011.
7. *Зимина*, *О. В*. Решебник. Высшая математика / О. В. Зимина, А. И. Кириллов, Т. А. Сальникова. — М. : Физматлит, 2000.
8. *Клетеник*, *Д. В*. Сборник задач по аналитической геометрии. — СПб. : Лань, 2014.
9. *Краснов*, *М. Л*. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. — М. : Высшая школа, 1978.

10. *Кузнецов*, *Л. А.* Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). — СПб. : Лань, 2012.
11. *Крупин*, *В. Г.* Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / В. Г. Крупин, А. А. Туганбаев. — СПб. : Лань, 2011.
12. *Очков*, *В. Ф.* Интерактивная сетевая графическая иллюстрация основных численных алгоритмов решения задач математики : учебный сетевой ресурс / В. Ф. Очков, И. М. Петрушко, М. И. Петрушко, Н. А. Сливина. — URL: http://twt.mpei.ac.ru/TTHB/1/Anim_Num_Met.html.
13. *Петрушко*, *И. М.* Универсальный интерактивный справочник по математике для инженеров / И. М. Петрушко, М. И. Петрушко, В. Ф. Очков [и др.]. — URL: http://twt.mpei.ac.ru/math/.
14. *Пикулин*, *В. П.* Практический курс по уравнениям математической физики / В. П. Пикулин, С. И. Похожаев. — М. : МЦНМО, 2004.
15. *Плис*, *А. И.* Практические занятия «Математическая статистика в инженерном менеджменте» / А. И. Плис, И. А. Плис, Н. А. Сливина, А. А. Узлов. — URL: http://mcimeer.narod.ru.
16. *Плис*, *А. И.* Mathcad. Математический практикум / А. И. Плис, Н. А. Сливина. — М. : Финансы и статистика, 2003.
17. *Проскуряков*, *И. В.* Сборник задач по линейной алгебре. — СПб. : Лань, 2010.
18. Решебник. Высшая математика. Специальные разделы / под ред. А. И. Кириллова. — М. : Физматлит, 2003.
19. Сборник задач по математике для втузов / под ред. А. В. Ефимова, А. С. Поспелова — М. : Физматлит, 2001–2003.
20. *Чудесенко*, *В. Ф.* Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. Типовые расчеты. — СПб. : Лань, 2010.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Типовые расчеты

Елена Петровна БОГОМОЛОВА,
Александр Иванович БАРАНЕНКОВ,
Игорь Мелетиевич ПЕТРУШКО

СБОРНИК ЗАДАЧ И ТИПОВЫХ РАСЧЕТОВ
по общему и специальным курсам высшей математики

Учебное пособие

Зав. редакцией физико-
математической литературы *Н. Р. Нигмадзянова*
Ответственный редактор *Н. В. Черезова*
Технический редактор *А. С. Кузьмина*
Верстка *Л. Е. Голод*
Выпускающие *О. В. Шилкова, Н. А. Крылова*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com;
192029, Санкт-Петербург,Общественный пер., 5.
Тел./факс: (812) 412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 13.02.2015.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат $84\times108\ {}^{1}/_{32}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 24,36. Тираж 1000 экз.
Заказ № .
Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие «Правда Севера».
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, д. 32.
Тел./факс (8182) 64-14-54; www.ippps.ru